様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月５日現在

機関番号：１１４０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８　～　２０１０
課題番号：２０５４００５９
研究課題名（和文）　二階ベクトル場の幾何学的研究

研究課題名（英文）　Geometric research of 2-vector fields

研究代表者
三上　健太郎（MIKAMI KENTARO）
秋田大学・工学資源学研究科・教授
研究者番号：７０００６５９２

研究成果の概要（和文）：
ポアソン幾何学の主要な道具であるスカウテン括弧積を、他の概念で理解する試みがなされてきた。一般化された複素構造論(generalized complex structure theory)の観点からクリフォード代数の枠組みの中で、スカウテン括弧積が捉えられることを示した。なお、これまでポアソン幾何学の標準的な教科書である Lectures of on the geometry of Poisson manifolds (I.Vaisman)にあるスカウテン括弧積の定義が三上等が採用するスカウテン括弧積と異なる理由を明確にした。一方、シンプレクティック 2 次元平面の形式的ハミルトンベクトル場のなすリー環の同変ゲルファント・カリーニン・フックスコホモロジー群に関し、D. Kotschick and S. Morita “The Gel’fand-Kalinin-Fuks class and characteristic classes of transversely symplectic foliations”の計算結果を確認すると共にウエイト 18 まで完全に決定した。その際、数式処理ソフト Maple 用のプログラムを開発し数台のコンピュータを並列的に稼動し実効性を高めた。

研究成果の概要（英文）：
The Schouten bracket is a main tool in Poisson geometry and there are several trials of understanding of meaning of the Schouten bracket. Using some idea of generalized complex geometry, we investigated the essence of the Schouten bracket in the framework of Clifford algebra. Also, we have gotten complete understanding of difference of our Schouten bracket and the other bracket in I. Vaissman’s book “Lectures on the geometry of Poisson manifolds”(Birkhauser). Concerning to Gel’fand-Kalinin-Fuks cohomology of formal Hamiltonian vector fields on symplectic 2-plane, we prepared programs of Maple which is a computer software of symbol calculus and also several computers, and made a success in getting more information of Gel’fand-Kalini-Fuks cohomology until weight 18 comparing D. Kotschick and S. Morita’s work “The Gel’fand-Kalinin-Fuks class and characteristic classes of transversely symplectic foliations”.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	１，３００，０００	３９０，０００	１，６９０，０００
２００９年度	１，１００，０００	３３０，０００	１，４３０，０００
２０１０年度	１，１００，０００	３３０，０００	１，４３０，０００
年度			
年度			
総　計	３，５００，０００	１，０５０，０００	４，５５０，０００

研究分野：ポアソン幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学・微分幾何

キーワード：ポアソン, スカウテン括弧, 同変コホモロジー, ゲルファント, クリフォード代数

1. 研究開始当初の背景

ポアソン幾何学は 2 階ベクトル場 π で $[\pi,\pi]=0$ で特徴付けられるが, 三上・水谷の仕事 "Integrability of plane fields defined by 2-vector fields" (International Journal of Mathematics 16-2 (2005) 197–212) において, $[\pi,\pi]$ が非零の場合も統一的に研究できる道を開きました。この仕事の位置づけを簡略化して述べると

可積分系 ← ポアソン構造 →斜交葉層

↓概ポアソン化↓

微分方程式← 2 階ベクトル場 →一般葉層

の様に書けます。ここで概ポアソン化 (almost Poissonization) とはポアソン条件を課さない 2 階ベクトル場 (2-vector field) を研究対象にすることであり, 水平方向の初期の議論は例えば上述の三上・水谷の論文で開始されていました。

2. 研究の目的

ポアソン幾何学は接束上の特別な 2 階ベクトル場の幾何学と見なす事ができ, その特別な条件を弱めても議論を構築できることを示すことに成功した三上・水谷の仕事を, 接束から一般のリー環付きベクトル束 (Lie algebroid) に拡張し, 更には外微分の閉 1-形式による変形理論を構築する事を本研究の第一目的とします。更に, その理論の応用として, 一般化された複素構造 (generalized complex geometry) の変形理論を研究する事を次の目的に設定します。

3. 研究の方法

スカウテン括弧積用数式処理プログラムの改良, 更に Leibniz 代数の基礎研究, 及び, ある種の 2 階ベクトル場あるいはある種の接分布の幾何学的特徴付けの研究を行います。多様体の接束の代わりに, 一般のリー環構造付きベクトル束 (Lie algebroid) を考え, その上でのスカウテン括弧積の開発や外微分形式の変形の影響を詳細に調べる事により一般化の突破口とする事を意図しています。

4. 研究成果

ポアソン幾何学の出発点であるポアソン構造は二階ベクトル場がスカウテン括弧積を用いて記述するポアソン条件 $[\pi,\pi]=0$ を満たすポアソンテンソルである。我々が関心を寄せている状況はポアソン条件 $[\pi,\pi]=0$ を課さない 2 階ベクトル場 (2-vector field) の幾何学を研究することであり, 概ポアソン化 (almost Poissonization) と呼んでいる。π が住む空間は接ベクトル場の外積代数であり, Poisson 条件を記述するスカウテン括弧積はそこでの 2 項演算である。M を多様体とするとき，その接束 $\mathrm{T}(M)$ の p 次外積空間 $\Lambda^p\mathrm{T}(M)$ のセクション (切断) 全体を同じ記号で表すとき, ポアソン幾何学の主要な道具であるスカウテン括弧積とは, 直和空間 $\displaystyle\sum_{p=0}^{\dim M}\Lambda^p\mathrm{T}(M)$ の 2 項演算 $[\cdot,\cdot]$ で次の性質を満たすものである。

1. 次数を保つ。すなわち $P\in\Lambda^p\mathrm{T}(M)$, $Q\in\Lambda^q\mathrm{T}(M)$ の時 (以下この設定を仮定する), $[P,Q]\in\Lambda^{p+q-1}\mathrm{T}(M)$ (P の次数を p よりも $p-1$ と見なすと良い)。
2. 定数倍と和に関して双線形である。
3. $[P,Q\wedge R]=[P,Q]\wedge R+(-1)^{(p-1)q}Q\wedge[P,R]$
4. $[Q,P]=-(-1)^{(q-1)(p-1)}[P,Q]$
5. $[P,[Q,R]]=[[P,Q],R]$ $+(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,[P,R]]$
6. $P,Q\in\Lambda^1\mathrm{T}(M)$ (即ち M 上のベクトル場) であるとき, $[P,Q]$ は通常のベクトル場の Jacobi-Lie 括弧積に等しい。

7. $P \in \Lambda^1 \mathrm{T}(M)$, $f \in \Lambda^0 \mathrm{T}(M)$ (i.e., f は M 上の関数) に対して $[P, f] = \langle P, df\rangle$, ここで d は外微分演算子, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は自然なペアリングを意味する。

(5) は (4) を利用して変形すると

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[P,[Q,R]] + c.p. = 0$$

となり, super の意味での Jacobi 律を満たす。また, 左右対称に

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[[P,Q]R,+]c.p. = 0$$

も満たす。
(3) は外積への左からの作用と見なせるが, (4) を利用すると右からの公式も左右対称に成立する。それに比べて, Lectures on the geometry of Poisson manifolds (by I. Vaisman, 1994 年) での Schouten bracket の定義では (4) が

$$[Q,P] = (-1)^{qp}[P,Q]$$

となっていて, (3) の左右の対になるべき右からの作用の公式は対称性を持たないし, 2 つ目の Jacobi 律が成立しないなど形式美において不十分であり又複雑で長い計算を正しく実行するにはより注意深さが求められる等弱点がある。
多様体 M の接束 $\mathrm{T}(M)$ の双対である余接束 (cotangent bundle) $\mathrm{T}^*(M)$ との直和空間上で非退化 2 次形式として自然なペアリング

$$\langle X+\alpha, Y+\beta\rangle = \langle X,\beta\rangle + \langle Y,\alpha\rangle$$

による Clifford algebra (クリフォード代数) を考える。その時, 外積代数はクリフォード代数の特別な場合 (2 次形式=0) でありクリフォード代数は外積代数の量子化とも言われている。一般化された複素構造 (generalized complex geometry) のクリフォード代数は接束の外積代数と予接束の外積代数 (微分形式の空間) を同時にかつ自然に取り込んでいる。そしてスカウテン括弧積はこの枠組みの中で外微分作用素との関係が明確に記述できる。 外微分形式の空間, 多重ベクトル場の空間, Courant algebroids, generalized complex geometry 等の概念を同時に取り扱うことが出来る。$X+\alpha \in \mathrm{T}(M)\oplus \mathrm{T}^*(M)$ の各外微分形式 $\omega \in \Lambda^{\bullet}\mathrm{T}^*(M)$ への作用を

$$(X+\alpha)\cdot\omega := i_X\omega + \alpha\wedge\omega$$

(ここで $i_X\omega \in \Lambda^{\bullet-1}\mathrm{T}^*(M)$, $\alpha\wedge\omega \in \Lambda^{\bullet+1}\mathrm{T}^*(M)$ である) と定義し, $\mathrm{Cliff}(\mathrm{T}(M)\oplus \mathrm{T}^*(M))$ の作用に自然に拡張する。この作用に関して $\mathrm{Cliff}(\mathrm{T}(M)\oplus \mathrm{T}^*(M))$ の homogeneous element に対し even or odd parity を定めることが出来る。
余接束の外積空間 $\displaystyle\sum_{p=0}^{\dim M}\Lambda^p\mathrm{T}^*(M)$ の外微分作用素 d はパリティが $+1$ の odd operator である。$\displaystyle\sum_{p=0}^{\dim M}\Lambda^p\mathrm{T}^*(M)$ に作用する $\mathrm{Cliff}(\mathrm{T}(M)\oplus \mathrm{T}^*(M))$ と d を含むパリティ付き作用素に対し, “交換子積” を

$$[\![P,Q]\!]\cdot\omega := (P\cdot Q - (-1)^{pq}Q\cdot P)\cdot\omega$$

と定義する。詳細は省略するが, 三上が 1985 年以来愛用してきた Schouten bracket は $[\![[\![P,d]\!],Q]\!]$ であり, 1994 年刊行された Vaisman の著書 Lectures on the geometry of Poisson manifolds でのスカウテン括弧積の実体は $[\![[\![d,P]\!],Q]\!]$ であることが判明した。このようにポアソン幾何学で最も重要な道具であるスカウテン括弧積がクリフォード代数の枠組みの中で捉えられることを分かった。2007 年刊行された “From Geometry to Quantum Mechnics, Progr. Math” (vol.252) の K. Mikami, T. Mizutani の論文 Lie algebroids associated with deformed Schouten bracket of 2-vector fields (147–160) の中で, deformed Schouten bracket の概念を導入しその幾何学的性質を調べた。今後は $[P,Q] = [\![[\![P,d]\!],Q]\!]$ であるとの理解から更に詳細な研究の進展を期待している。

この点から従来行ってきた三上・水谷の Poisson 構造の 1 次閉微分形式による変形理論研究の見直しを行うとともに数式処理ソフト Maple に提供されているクリフォード代数計算パッケージ (Rafal Ablamowich, Tennessee Technical University, USA と Bertfried Fauser, University Konstanz, Germany) の性能や備えている機能及び使用限界等を調べた。調査の中で判明したことであるが, 彼らの利用している Rota-Stein Cliffordization なる組み合わせ論的なオペレーションの定義は今後我々の研究・ソフト改良に役立つものと思われる。
形式的ベクトル場の外積代数を余鎖体 (cochain complex) とする Gel'fand-Kalinin-Fuks コホモロジー群は定義は明確であるが, 実際に計算を実行することは容易ではない。そこである幾何構造に注目するとか対称性に注目した同変 (equivariance) な対象物に制限するなど, 小さな余鎖体 (cochain complex) に我々を制限することが考えられる。その一つが, シンプレクティック構造から決まるハミルトンベクトル場を扱う場合であり, シンプレクティック多様体として 2 次元ユークリッド空間に限ると対称性として, 自然に特殊線形群 SL(2,$\mathbb{R}$) が考えられる。シンプレクティック平面のハミルトンベクトル場はハミルトン関数 (ポテンシャル) を持ち定数を除いて一意である。その対応のもとで, ハミルトンベクトル場のリー環としての括弧積の対応物は, ハミルトン関数のポアソン括弧積である。又 SL(2,$\mathbb{R}$) 作用の対応も次のように分かっている。

	H-vector 場	H-関数
代数の積	J-L 括弧積	Poisson 括弧積
$\mathfrak{sp}$-作用	$[\xi_M, H_f]$	$\{\hat{J}(\xi), f\}$

必ずしも有限次元とは限らない実数体上の一般のリー環 $\mathfrak{g}$ を考える。各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 余鎖体を次で定義する。

$$C^k(\mathfrak{g}) := \{\sigma : \underbrace{\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}}_{k-\text{times}} \to V \mid \text{多重線形, 交代性}\}$$

各 $k-$th cochain (余鎖) $\sigma \in C^k(\mathfrak{g})$ に対し, 境界作用 (素) を

$$\begin{aligned}&(d\sigma)(X_0, \ldots, X_k)\\ := &\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j] \ldots \widehat{X_i} \ldots \widehat{X_j} \ldots)\end{aligned}$$

で定義する。d は $d^2 = 0$ を満たし, リー環 $\mathfrak{g}$ のコホモロジー群 (cohomology groups) を定義することが知られている。
この分野の研究を進める上で注意すべきは

(1) 1-余鎖 (体) を知る
(2) 1-余鎖 (体) と括弧積のペアリングを知る
(3) 同変などの相対的な制約条件を知る

ことである。シンプレクティック多様体 $\mathbb{R}^n$ の標準座標を $q^1 \ldots q^n, p_1 \ldots p_n$ とするとき, (形式的な) ハミルトンポテンシャル関数の空間は

$$\mathbb{R}[[q^1 \ldots q^n, p_1 \ldots p_n]]/\mathbb{R} = \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} S^\ell$$

であり, $q^1 \ldots q^n, p_1 \ldots p_n$ の ℓ-th 対称関数族 S^ℓ の直和に分解される。ポアソン括弧積が

$$\{f, g\} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f, g)}{\partial(q^i, p_i)}$$

であることから $\{S^k, S^\ell\} \subset S^{k+\ell-2}$ が成立する。
S^ℓ の双対空間を $\mathfrak{S}_\ell$ なる記号で表すとき,

$$C^1(\mathfrak{ham}_{2n}) \cong \mathfrak{ham}_{2n}{}^* = \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{S}_\ell$$

また

$$\begin{aligned}C^2(\mathfrak{ham}_{2n}) &\cong \mathfrak{ham}_{2n}{}^* \wedge \mathfrak{ham}_{2n}{}^* = \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{S}_\ell \wedge \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{S}_k\\ &= \bigoplus_{1\leq k} \Lambda^2 \mathfrak{S}_k \oplus \bigoplus_{1\leq k<\ell} \mathfrak{S}_k \otimes \mathfrak{S}_\ell\end{aligned}$$

等々である。その由来は省略するが, $\mathfrak{S}_\ell$ の要素の **weight** を $\ell - 2$ と定義して, 余鎖体をウエイトで次のように分解する。

$$C^\bullet_{GF}(\mathfrak{ham}_{2n})_w := \sum_{\text{“}w-\text{condition”}} \Lambda^{k_1}\mathfrak{S}_1 \otimes \Lambda^{k_2}\mathfrak{S}_2 \otimes \cdots$$

但し “w−condition” は $\sum_{j=1}^{\infty}(j-2)k_j = w$ なる条件である。$C^{\bullet}_{GF}(\mathfrak{ham}_{2n}) \cong \sum_{w=-2n}^{\infty} C^{\bullet}_{GF}(\mathfrak{ham}_{2n})_w$. 境界作用素 d は weights を保つので, コホモロジー群は次のような自然な分解を持つ。

$$H^{\bullet}_{GF}(\mathfrak{ham}_{2n}) \cong \sum_{w=-2n}^{\infty} H^{\bullet}_{GF}(\mathfrak{ham}_{2n})_w$$

$H^{m}_{GF}(\mathfrak{ham}_{2n})_w$ を研究するには, $\sum_{j=1}^{\infty} k_j = m$ と $\sum_{j=1}^{\infty}(j-2)k_j = w$ なる条件の下で

$$C^{m}_{GF}(\mathfrak{ham}_{2n})_w := \sum \Lambda^{k_1}\mathfrak{S}_1 \otimes \Lambda^{k_2}\mathfrak{S}_2 \otimes \cdots$$

を調べればよい。同変コホモロジー群の場合は weight が偶数の場合のみを調べればよいことが知られている。森田茂之さん (東大数理) 等の研究 The Gel’fand-Kalinin-Fuks class and characteristic classes of transversely symplectic foliations (D. Kotschick and S. Morita) を参考にして, シンプレクティック 2 次元平面の形式的ハミルトンベクトル場のなすリー環の同変ゲルファント・カリーニン・フックスコホモロジー群をウエイト 18 まで完全に決定した。汎用的な Maple(数式処理ソフト) プログラムを開発し, 新規にウエイト 18 までの計算に成功した。
Weight= 18 の場合の結果を以下に述べる。次 (数) k とは k-次 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-invariant cochain complex C^k の事で, 次元とは $\dim C^k$ の事である。rank(d) とは $d : C^k \longrightarrow C^{1+k}$ のランクの事である。Betti 数は,

$$\begin{aligned}
&\dim H^k\\
:=&\dim\left(\mathrm{Ker}(d : C^k \to C^{k+1})/\mathrm{Im}(d : C^{k-1} \to C^k)\right)\\
=&\dim C^k - \dim\mathrm{Im}(d : C^k \to C^{k+1})\\
&\quad - \dim\mathrm{Im}(d : C^{k-1} \to C^k)\\
=&\dim C^k - \mathrm{rank}(d : C^k \to C^{k+1})\\
&\quad - \mathrm{rank}(d : C^{k-1} \to C^k)
\end{aligned}$$

次 (数)	次元	rank(d)	Betti 数
1	0	0	0
2	1	1	0
3	10	9	0
4	80	71	0
5	262	191	0
6	380	188	1
7	268	80	0
8	100	20	0
9	21	1	0
10	1	0	0

その際, 数式処理ソフト Maple 用のプログラムを開発し数台のコンピュータを並列的に稼動し実効性を高めた。
シンプレクティック構造は, 我々の研究対象である二階ベクトル場の特別な場合であり, ポアソン構造とポアソンコホモロジー群の (関係) の研究はほぼ未開の分野である。ポアソンコホモロジー群も, 定義は明確なものの, 計算には困難が伴うとの状況は Gel’fand-Kalinin-Fuks コホモロジー群と同様である。従って, 二階ベクトル場から決まるコホモロジー群の研究のために, 2 次元ユークリッド空間の SL(2,R) 同変 Gel’fand-Kalinin-Fuks コホモロジー群の研究は多くの示唆を提供するものと期待する。

5．主な発表論文等
（研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 3 件）
1. 三上健太郎, Leaf invariants, Foliations and group of diffeomorphisms 2010, 2010,10,29, 東京大学玉原国際セミナーハウス（群馬県沼田市 ）
2. 三上健太郎, 水谷先生とポアソン構造, 水谷先生退職記念講演会, 2010.3.5, 埼玉大学 (さいたま市)

3. 三上健太郎, Unimodular Lie algebras in Poisson Geometry, シンプレクティック幾何学とその周辺 (幾何学分科会研究集会), 2009.11.25, 岐阜経済大学 (岐阜県大垣市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三上　健太郎（MIKAMI KENTARO）

秋田大学・工学資源学研究科・教授

研究者番号：70006592