様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年４月２０日現在

機関番号：11501
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540060
研究課題名（和文）　有理ホモロジー球面をリンクにもつ複素２次元特異点の研究

研究課題名（英文）　A study of complex surface singularities with rational homology sphere links
研究代表者
奥間　智弘（OKUMA　TOMOHIRO）
山形大学・地域教育文化学部・准教授
研究者番号：00300533

研究成果の概要（和文）：有理ホモロジー球面をリンクにもつ複素２次元特異点の重要なクラスであるスプライス商(splice-quotient) 特異点を主な対象とし，埋め込み次元や重複度，幾何種数などの基本的な解析的不変量が位相的であるかどうかを判定すること，またそれらの不変量を具体的に計算する方法を与えることにおいて新しい結果を得た．また，スプライス商特異点を含むより広いクラスで成り立つ幾何種数の加法公式を求めた．

研究成果の概要（英文）：　For splice quotient singularities, which form an important class of complex surface singularities with rational homology sphere links, we obtained new results on determining if fundamental analytic invariants such as the embedding dimension, the multiplicity, and the geometric genus are topological, and on a method to compute these invariants explicitly. We also obtained an additivity formula for the geometric genus for a class larger than that of splice quotient singularities.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００８年度 | ９００，０００ | ２７０，０００ | １，１７０，０００ |
| ２００９年度 | ８００，０００ | ２４０，０００ | １，０４０，０００ |
| ２０１０年度 | ６００，０００ | １８０，０００ | ７８０，０００ |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | ２，３００，０００ | ６９０，０００ | ２，９９０，０００ |

研究分野：複素特異点論
科研費の分科・細目： 数学・幾何学
キーワード：２次元特異点，splice-quotient 特異点，幾何種数，埋め込み次元，重複度

## １．研究開始当初の背景

２次元複素解析空間の正規特異点（以下，単に２次元特異点という）に関する基本的な問題として，どのような解析的不変量がどのような条件のもとで位相的になるのかを決定し，その場合の公式を求めるということがある．それは本研究における基本的な問題意識である．２次元特異点は孤立特異点であり，その近傍はリンクといわれる実３次元多様体上の錘と同相である．リンクは特異点解消グラフにより決定されるいわゆる graph manifold である．したがって，位相的不変量はリンクまたはグラフの不変量のことである．

(X,o) をリンクが有理ホモロジー球面になるような 2 次元特異点とする．この条件は特異点解消の例外集合が有理曲線の木になることと同値である．このとき，リンクのホモロジー群は有限であるから，普遍アーベル被覆 (universal abelian cover) とよばれる 2 次元特異点の有限分岐被覆 (Y,o) → (X,o) が一意的に存在する．まず，1980 年代に W. Neumann は，(X,o) が擬斉次特異点 (quasi-homogeneous singularity) なら Y は Brieskorn 完全交差特異点になることを示した．2000 年代に入り，W. Neumann と J. Wahl はその自然な一般化として，スプライス特異点 (splice type singularity) を定義した．それは，特異点解消グラフから組み合わせ論的に構成される多項式を先頭型式とする関数で定義される完全交叉 2 次元特異点である．そして，「X が Q-Gorenstein 特異点なら Y は splice type 特異点になる (UAC 予想)」と予想した．この予想が成り立つような 2 次元特異点 X をスプライス商特異点 (splice-quotient singularity) という．スプライス特異点とスプライス商特異点の基礎理論は Neumann と Wahl によって構築された．それとほぼ平行して，A. Nemethi らにより UAC 予想に対する反例が与えられたが，それはむしろ，スプライス商特異点の性質・特徴に興味を引くこととなった．

一方で研究代表者は一般の普遍アーベル被覆のアファイン環を特異点解消空間の直線束を用いて表し，有理型特異点と有理ホモロジー球面をリンクにもつ最小楕円型特異点がスプライス商特異点であることを証明した (Neumann- Wahl の予想)．その後，Neumann と Wahl はスプライス商特異点の特徴づけである端曲線定理 (End Curve Theorem) を証明した (研究代表者によるより短い証明もある)．研究代表者は，端曲線定理を応用し，スプライス商特異点の幾何種数を特異点解消グラフから帰納的に計算するための公式を与えた．その公式はある意味で加法性を持っている．本研究の研究協力者の Nemethi 氏との共同研究により，リンクのスプライスとよばれる手術に関するキャッソン不変量の加法性と幾何種数公式の加法性の関係を研究した結果，スプライス商特異点に関して Neumann-Wahl のキャッソン 不変量予想 (リンクのキャッソン不変量とX のミルナーファイバーの符号数を結びつける予想) を肯定的に解決した．さらに，キャッソン不変量予想の一般化である Nemethi-Nicolaescu のサイバーグ・ウィッテン不変量予想も肯定的に解決した．

このように，本研究の開始時期において，スプライス商特異点の幾何種数（またはミルナーファイバーの符号数）に関しては大きな進展があった．スプライス商特異点の定義から，他の解析的不変量についてもグラフから具体的に計算できることが期待された．しかし，埋め込み次元や重複度など基本的な解析的不変量の考察や，スプライス商特異点を含む大きなクラスへの結果の拡張はまだ十分ではなかった．

## ２．研究の目的

本研究では，スプライス商特異点を対象と し，基本的な解析的不変量を，位相から決定・計算できるかどうかという観点から詳細に調べることが第１の目的である．一般に，特異点の解析的不変量を求めることは非常に困難である．しかし，特異点が何らかの良い構造を持つ場合にはそれがはっきり捉えられる可能性がある．本研究の過程でスプライス商特異点の「良い構造」の理解を深め，スプライス商特異点を含む広いクラスの研究のきっかけを作ることが二つ目の目標である．例えば，スプライス商特異点のキャッソン不変量予想の解決については幾何種数公式の「加法性」が重要であったが，その性質がスプライス商特異点固有のものかどうかは明らかではないと思われる．

具体的には次のようなことを考えていた．普遍アーベル被覆の Y の不変量と X の不変量の比較公式を求め，スプライス商特異点の不変量の研究をスプライス 特異点の研究に帰着させる．Y のアファイン環を考えれば，その不変量はX の特異点解消空間上の直線束に付随する不変量であるため，既約因子の付値によって定義されるある種の次数付環とそのポアンカレ級数を研究する．その級数と特異点上の関数から決まるモノドロミーのゼータ関数の関係も調べる．また，幾何種数に並ぶ最も基本的な不変量でありながら，まだ研究が十分になされていない埋め込み次元と重複度について詳細に調べる．しかし，これらの目標のうちポアンカレ級数に関する研究は先送りになってしまった．

## ３．研究の方法

スプライス商特異点のある不変量が位相的であると予想できる場合，特異点解消グラフの組合せ的情報と特異点の解析的構造を具体的にどのように結び付けるかが問題になる．その二つを関係づけるのが単項式サイクル (monomial cycle) で

あり， それは端曲線定理の研究代表者による証明でも用いられた．単項式サイクルが特異点解消空間上の関数の因子として実現されることが重要である．それによって，ある種の関数が存在するか否かが判断できる．例えば，直線束の固定部分や基底点の有無を調べるのに応用できる．重複度や幾何種数の研究では，そのような方法を精密に行うことが重要である．埋め込み次元のようなより環論的な不変量については上の考察に加え，組合せ代数的な観点からの考察も重要である．また，計算例の少ない不変量については，具体例を多く与える必要もある．
本研究を進めるためには，複素幾何学，代数幾何学，低次元トポロジーなどの各方面からのアプローチが必要である. それらの 新しい知識とアイデアを得るために，連携研究者および研究協力者との協力はもとより，研究集会やセミナーでの研究交流も 積極的に行った.

## ４．研究成果

### （1）埋め込み次元について （研究協力者の Nemethi 氏との共同研究）

一般にはスプライス商特異点の埋め込み次元は位相的不変量ではない．この研究では主な対象を擬斉次特異点とした．このときのリンクはザイフェルト多様体であり，それはザイフェルト不変量（有限個の整数の組）で与えられる．まず，擬斉次特異点の擬斉次性と位相（グラフ，ザイフェルト不変量）を保つ変形で，埋め込み次元が変化するような新たな具体例をいくつか構成した．その例においては，埋め込み次元が大きくなるパラメータもとらえる事が出来た．実際には次数付加群としての接空間のポアンカレ多項式の研究を行った．この多項式に１を代入したものが埋め込み次元である．前述のように，このポアンカレ多項式はザイフェルト不変量では決まらないが，それが位相的であるかどうかを判定することが出来，さらに，それらが位相的でなくてもジャンプするパラメータをとらえることが出来た．たとえば，グラフの枝が５本以内の場合やリンクのジェネリックなファイバーが十分小さな位数を持つ場合は位相的であることがわかった．さらに，中心曲線の自己交点数が枝の数に対して十分小さい場合はザイフェルト不変量を用いた具体的な公式を求めることが出来た．また，埋め込み次元が位相的である擬斉次特異点のスプライス商特異点内における同特異変形で埋め込み次元が変化する例を与えた.

### （2）重複度について

特異点の重複度とはその局所環の重複度のことである．本研究ではスプライス商特異点の重複度が位相的に定まるかどうかを問題にしている．まず，特異点解消空間上に極大イデアルサイクル Z が定義される． これは例外集合で例になる，零関数でない正則関数の因子で最小のものである．よく知られていることだが，このサイクルに付随するイデアル層 O(-Z) が基底点を持たなければ，重複度は Z の自己交点数の絶対値に等しい．
本研究では，スプライス商特異点 (X,o) の特異点 o 以外で不分岐な有限アーベル被覆の重複度をガロア群と X の特異点解消グラフから具体的に計算する方法を与えた．特に，スプライス商特異点とその普遍アーベル被覆の重複度は位相不変量であることが証明された．リンクのホモロジー群は例外集合が生成するアーベル群の discriminant group であることからガロア群が有理数係数サイクルで表される．単項式サイクルをうまく使うことによって，普遍アーベル被覆の特異点解消空間上の群作用に関する不変関数で極大イデアルサイクルを一般点で生成するものをとらえ，基底点の有無やそれを解消するために必要なブローイングアップの情報も得ることが出来た.

### （3）幾何種数の公式について

スプライス商特異点の幾何種数公式はこれらの特異点を特徴づける端曲線条件（端曲線定理より）を用いることによって得られていた．この条件を少し弱めた弱端曲線条件のもとで幾何種数公式を与えた．それは次のようなものである． X をリンクがホモロジー球面であって，弱端曲線条件を満たす特異点とし，特異点解消グラフの一つの頂点 v を選び，それを除くことで得られる連結部分グラフ（連結成分）を G1，…，Gk とする．まず，特異点解消空間で，Gi に対応する例外集合をブローダウンして得られる特異点 Xi も弱端曲線定理を満たすことを示した．次に，頂点 v に対応する既約例外因子に付随する付値による X の局所環のフィルトレイションから決まる次

数付き環のポアンカレ級数を考え，ヒルベルト・サミュエル多項式の定数項に類似した不変量を定義し，それを c(v) と表す．このとき，X の幾何種数は c(v) と X1，…，Xk の幾何種数の総和に等しい．各 Xi も弱端曲線条件を満たすので同じ公式を Xi に適用できる．また，グラフを分割し続けると鎖にたどり着くが，それは有理型特異点に対応する（幾何種数はゼロ）． したがって，X の幾何種数は帰納的に計算できるのである．

スプライス商特異点の場合は不変量 c(v) がグラフ不変量であることが証明できた．そのことと公式の加法性がリンクのキャッソン不変量またはサイバーグ・ウィッテン不変量の同様の公式と結びついたのである．

今後の研究において，弱端曲線定理を満たす特異点を理解することが重要である．そのための手がかりとして，不変量 c(v) についてそれがいかなる条件のもとで位相不変量になるか， またどのように計算できるかを考察することがあげられる．それは，キャッソン不変量予想の一般的な解決へ一歩である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

A. Nemethi and T. Okuma, The embedding dimension of weighted homogeneous surface singularities, Journal of Topology 3 (2010), 643--667. 査読有

〔学会発表〕（計６件）

① 奥間智弘, A formula for the geometric genus of surface singularities, 「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2011」, 首都大学東京南大沢キャンパス, 2011 年 3 月 9 日
② 奥間智弘, 2 次元特異点の幾何種数公式, 「平成２２年度 多変数関数論冬セミナー」, 京都大学 理学研究科, 2010 年 12 月 24 日
③ 奥間智弘, Invariants of splice quotient singularities, 「特異点と多様体の幾何学」, 山形大学理学部, 2010 年 9 月 18 日
④ 奥間智弘, Invariants of splice quotient singularities, 「第５回日仏特異点シンポジウム」, ストラスブール大学，フランス，2009 年 8 月 27 日
⑤ 奥間智弘, Splice quotient singularities and the Casson invariant conjecture,「第 56 回トポロジーシンポジウム」, 北海道大学クラーク会館, 2009 年 8 月 8 日
⑥ 奥間智弘, スプライス商特異点の重複度, 「トポロジーと写像の特異点」, 信州大学理学部, 2009 年 6 月 4 日

６．研究組織

(1)研究代表者
奥間　智弘（OKUMA　TOMOHIRO）
山形大学・地域教育文化学部・准教授
研究者番号：00300533

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
都丸　正（TOMARU TADASHI）
群馬大学・医学部・教授
研究者番号：70132579