様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　２４　年　６　月　６　日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008 ～ 2011
課題番号：２０５４００６１
研究課題名（和文）　代数的同境界理論とモチビックコホモロジーの研究

研究課題名（英文）　algebraic cobordism and motivic cohomology

研究代表者
柳田　伸顕　（YAGITA　NOBUAKI）
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：20130768

研究成果の概要（和文）：　最初に幾何学的考察を用いて同境界理論を考え、その後代数学の体論を利用して、Chow ring を計算する。さらに algebraic topology を使って、motivic cohomology まで計算しようと言うのが目的である。具体的な空間は位相群の classifying spaces、たとえば BU(n), BO(n)などと、２次形式で定義される代数多様体(quadrics)である。それらについての具体的な計算が研究成果である。

研究成果の概要（英文）：Firstly, by using geometric arguments, we compute algebraic cobordism, next we compute motivic cohomology using fields theories. The concrete spaces which we can compute are classifying spaces, for example, BU(n), BO(n) and quadrics, in particular over the real number field.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	９００，０００	２７０，０００	１，１７０，０００
２００９年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
２０１０年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
２０１１年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
年度			
総　計	３，３００，０００	９９０，０００	４，２９０，０００

研究分野：数学
科研費の分科・細目：幾何学
キーワード：代数的同境界理論、モチビックコホモロジー

１．研究開始当初の背景

（１）　motivic cohomology は Susin,Beilinson,Lichitenbaum などの人々によって１９７０年代より成り立つべき性質が研究されていたが、その定義すら確立していなかった。１９９０年代の初頭Suslin とVoevodsky はその定義と構成方法を確立した。それゆえ etale cohomology, Chow ring と motivic cohomology の関係が明確化された。

（２）　これらの結果を駆使し、1996 年に Voevodsky は motivic cohomology　を使い Milnor 予想を証明した。Milnor 予想と言うのは motivi cohomology の或る

部分が etale cohomology と一致していると言うものである。最初の証明は MoravaK-theory が代数幾何にも存在している散在していればと言う仮定の下に行われた。その後純粋代数幾何学的な証明が行われた。

（3） 数年前より、Voevodsky, Rost,Suslin の論文が発表され Milnor 予想の mod p 版である Bloch-Kato 予想の解決も宣言された。P=2 の場合は２時形式の定義する多様体が使用されたが、p が奇数の場合 norm varity と言うものが重要になる事が分かった。

（4） norm variety の研究には Moreno,Levin の algebraic cobordism の定義だけではなく、Pandraharipande Levine により、発見された、同境界理論の新しい定義が重要となってきていた。また代数的な Morava K-theory の理論の研究が重要性を帯びて来た。

２．研究の目的

（1） 最初に、幾何学的考察を用いて、同境界理論を考え、その後代数学の体論を利用して、Chow ring を計算する。さらに algebraic topology を使って、motivic cohomology まで計算しようと言うのが目的である。さらに代数的 Morava K-theory のいろんな性質を調べる事も大きな目的である。

（2） 具体的な空間は位相群の classifying spaces、たとえば BU(n), BO(n)、例外 Lie 群 G_2,F_4,E_6 など、また２次形式で定義される代数多様体(quadrics)である。さらに G-Torsor の Chow ring の計算の開発も目的のひとつである。

３．研究の方法

（1） 最初に代数的同境界論を計算し、その後に Chow ring を、さらに motivic cohomology までも計算しようというのが当研究の方法でもある。

（2） 最初の２年間は主に Galois 群との関係、代数群の motivic cohomology を主に研究をおこなった。G-Torsor の Chow ring の計算も簡単な場合から考えを進めていた。

（3） 後半の２年間はさらに、Levine、Pandraharipande により，代数的同境界理論も新しい定義が発見されたが、それらの結果を当然ここで使った。特に Rost Motives を使い、２次形式により定義された多様体の Chow ring を計算した。さらに定義体が実数体の場合に motivic cohomology も計算した。この時、coniveau spectral sequence を多用している。

（4） さらに、外国の研究者の結果を理解し、たとえば層の理論等や、代数幾何学の理論を使わずに純粋に BP―理論のみでできる所とそうでないところを、区別整理することが必要である。特に Atiyah-Hirzebruch spectral sequence は代数的 K―理論の計算にも役立つのでこの方面も勉強が必要であると感じている。Morava K- theory の存在に関しての研究も大きな目的であった。かなり研究を行った。しかし Morava K-theory の Atiyah-Hirzebruch spectral sequence に関し未だ疑問視されているのは不満の残る所である。

４．研究成果

（1） 具体的な空間は位相群の classifying spaces、たとえ

ば BU(n), BO(n)などと、2次形式で定義される代数多用体(quadrics)である。それらについての具体的な計算が研究成果である。
①代数的同境界理論に対する、Atiyah-Hirzebruch spectral sequence は柳田が構成したものであるが、特に外国の数学者との関係を重視し応用しやすい形に変形をあたえている。
②これらを使い、Galois 群と motivic cohomology, coniveau spectral sequence の関係、代数群の motivic cohomology の研究をおこなった。

（2） G を compact Lie group とする。複素化を当してこれを複素数体上の代数群と見る。また G を大きな次元の vector space V への埋め込みとするとき (G-S) /V が代数多様体であることが知られて、classifying space BG の motivic cohomology とは(V-S)/G の motivic cohomology を意味する。ここでの結果は motivic cohomology H(BG)の計算である。

① G=O(n),SO(4) の Chow ring の計算の場合は Pandraharipande Totaro により計算されている.彼らの方法は表現論を巧妙に理了したものである。

② 我々は motivic cohomology について O(n),SO(4)を計算しさらに motivic cohomology に Gottlieb transfer が存在するとき G_2、Spin_7 も求めるかとができた。これは京都大学の人たちがやっている通常の cohomology operations の計算を最大限利用して行った。

（3） G は上記の群とする。Cohomological invariant Inv(G)とは粗く言うと k 上有限生成の体 F について自然な写像 H^1(F;G)→H^1(F)の作る環の事をいう。BG をやはり上記の classifying space とすることになる。
① Totaro は BG と cohomological invariant の関係を明示した。Serre Merkerjev より Rost の cohomology invariant が非常に詳しく調べられて、出版もなされている。
②我々はこれを使って、cohomology invariant を例外群、Spin_7,Spin_9 の場合に計算した。これは京都大学の人たちがやっている通常の cohomology の計算を最大限利用して行った。
③また Galois cohomology と motivic cohomology の関係を使って cohomology invariant が motivic cohomology のどの部分から計算できるかを示した。群が基本 abel 群のとき、1次元の元の外積代数となるが一般の場合もそれに相当する部分となっている。

（4） SO(2m) の Chow ring は Field によって計算されていたが、Molina-Vistoli により stratifed methods という新しい方法でべつ証明が与えられた。 この strafied methods は非常に強力であり上記の motivic cohomology 計算にも用いた。井上氏と私は BP(BSO(2n))の計算にそれを用いて BP(SO(2n))を決定する事ができた。BP(O(n)),BP(SO(2n+1))は１９８０年代に Wilson が決定していて、１９９０年代初頭に BP(SO(4)),BP(SO(6)) をそれぞれ私と井上氏が計算をしていた。方法は Atiyah-Hirzebruch spectral sequence を使い大量の計算をするものであった。 それが Chow ring、motivic cohomology という代数幾何学から生まれた概

念を利用し、２０年ぶりに解決したので我々は感激している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ９ 件）

1. N.Yagita, Note on Chow rings of nontrivial G-torsors over a field. Kodai Math. J. 査読有 34 (2011), 446-463.
2. M.Tezuka and N.Yagita, The image of the map from group cohomology to Galois cohomology. Trans. AMS 査読有 363,(2011), 4475-4503.
3. N.Yagita, Coniveau filtration of cohomology of groups. Proc. London Math. Soc. 査読有 101 (2010), 179-206.
4. N.Yagita, Motivic cohomology of quadratic and the coniveau spectral sequence. J. K-theory 査読有 6 (2010), 547-589.
5. K.Inoue and N.Yagita, The complex cordism of BSO_n. Kyoto J. Math. 査読有 50 (2010), 307-324.
6. M.Kameko and N.Yagita, Chern subrings. Proc. AMS 査読有 138 (2010), 367-373.
7. T.Okayasu, New examples of hyper surface with constant positive scalar curvature in the Euclidean space. J. Math Soc. Japan 査読有 (2010), 1137-1166.
8. N.Yagita, Chow rings of excellent quadrics. J. Pure and Appl. Algebra. 査読有 212 (2008), 2440-2449.
9. M.Kameko and N.Yagita, The Brown-Peterson cohomology of the classifying spaces of projective unitary group PU(p) and the exceptional Lie groups. Trans. AMS 査読有 360 (2008), 2265-2284.

６．研究組織
(1)研究代表者

柳田　伸顕（YAGITA NOBUAKI）
茨城大学、教育学部、教授
研究者番号：20130768

(2)研究分担者

岡安　隆　（OKAYASU TAKASHI）
茨城大学、教育学部、教授
研究者番号：00191958

工藤　研二（KUDOU KENJI）
茨城大学、教育学部、講師
研究者番号：00114017