

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540062

研究課題名（和文）ある種の複素2次元特異点と閉リーマン面の退化族の関係について

研究課題名（英文）On some relations between complex surface singularities of some types and degeneration families of compact Riemann surfaces.

研究代表者

都丸 正 (TOMARU TADASHI)

群馬大学・医学部・教授

研究者番号：70132579

研究成果の概要（和文）：

代表者は、研究テーマ「複素2次元特異点と閉リーマン面の退化族の関係について」の研究をこの15年間ほどしてきたが、10年ほど前に、代表者は論文「Pencil genus for normal surface singularities」(J. Math. Soc. Japan, 2007)において、任意の複素2次元特異点とその極大イデアルの元 f を与えたとき、その特異点解消空間と f の解消空間上への引き上げについて、それを自然な形で拡張するように、特異点解消空間の閉リーマン面の退化族の全空間への埋め込みを与えた。これを用いて、複素2次元特異点のPencil種数なる不変量を定義し、種々の性質を調べた。

このような議論の複素乗法群つきの議論を研究すべく本研究は行った。 C^* を複素乗法群とすると、閉リーマン面の C^* -作用をもつ退化族の全空間は、定義では複素解析曲面としているが、2008年に C^* -同変に代数曲面と解析同型なことを示した。また、 C^* -作用をもつ複素2次元特異点 (X, o) を固定したとき、そのある種の巡回被覆として決まる2つの特異点 (X_1, o) と (X_2, o) は、その被覆の次数に関するある種の条件下で、双対な退化族に各々埋め込めることを具体例の計算を通して観察していたが、2009年度はこの事実を一般的な状況で厳密に証明した。この証明のための準備として、2次元巡回商特異点の巡回被覆についての研究を精密化し、2次元巡回商特異点の巡回被覆として得られる2次元巡回商特異点の形を決定した。さらに、2009年度は、この結果から、完備（コンパクト）な C^* -作用をもつ代数的退化族と C^* -作用をもつ2次元特異点との関係について研究した。その成果として、上記、2つの特異点 (X_1, o) と (X_2, o) を考えたとき、その被覆の次数の和が、もとの特異点の次数で割りきれるとき、後藤一渡辺の a -不変量に一種の双対性が現れることを示した。また、Milnor数に関しても同様な双対性が現れることを示した。また、これらの結果を論文にまとめる作業を2010年に開始し、51ページほどの論文「 C^* -equivariant degenerations of curves and normal surface singularities with C^* -action」を作成し3月4日に投稿をした。

研究成果の概要（英文）：

Since 15 years ago, we have been researching some relations between normal surface singularities and degenerations of compact complex smooth curves.

Around ten years ago, I wrote a paper 「Pencil genus for normal surface singularities」(J. Math. Soc. Japan, 2007). There, we prove that given a normal surface singularity $(X, 0)$ and an element f of the maximal ideal of the singularity, there exists a one parameter degeneration family of curves which naturally extends the resolution space and the fiber map extends f . Using this result, we defined an invariant whose name is pencil genus of (X, o) , and also studied the several properties.

Now, let C^* be the complex multiplicative group. Around 6 years ago, we have been studying the C^* -equivariant degenerations family of curves. Also, we call them C^* -pencil of curves. In this research, we studied the several relations

between C^* -pencil of curves and normal surface singularities with C^* -action. From this point of view, we can introduced the notion of “dual” C^* -pencil of curves. This properties reflect dualities of some invariants (i. e., for example, Milnor numbers and Goto-Watanabe a -invariant). To prove this, we also prove a fundamental formula on cyclic covers of cyclic quotient singularities. Also, we gave a canonical method to construct all C^* -pencil of curves from holomorphic line bundle on curves.

We complete a paper whose title is [C^* -equivariant degenerations of curves and normal surface singularities with C^* -action], which contains 51 pages and was submitted a journal in May 4 in this year.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：複素解析幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：複素二次元特異点、リーマン面の退化族

1. 研究開始当初の背景

種数 g の退化族とは、”複素曲面 S から複素平面の原点 0 を中心とする円板 Δ への正則固有写像 Φ で、原点 0 以外の任意の $t \in \Delta$ の逆像（ファイバー）は種数 g の閉リーマン面である”ものをいい、 0 の逆像を退化ファイバーという。種数 1 の退化族に関する研究は小平邦彦により始まった [Ann. Math. 77 (1963), 563-626]。小平は退化ファイバーの numerical な分類をし、そのような退化族をすべて複素幾何的に構成しモノドロミー群を計算した。その後、種数 2 の場合に同様なことが、浪川幸彦-上野健爾により与えられ、また、トポロジーの立場から、松本幸夫-Montesinos は退化族の退化ファイバーの生じるメカニズムを調べ、これに基づき、足利正、高村茂等は近年、退化族の変形論を展開した。特異点と退化族の関係については、楕円型特

異点と種数 1 の退化族との関係が、V. I. Arnold, V. S. Kulikov, M. Reid により 1975~85 年頃に見い出された。彼等の結果に触発され、U. Karras は種数 1 に限らない一般の退化族を考え、それからある手続きを経て得られる特異点を Kodaira 特異点と名付け研究し、変形論に応用した (Math. Ann. 247 (1980), 43-65)。

C^* -作用を持つ特異点の研究は、P. Orlik-P. h. Wagreich [Ann. Math. 93 (1971), 205-228] 以来、複素解析幾何の立場から齋藤恭司、藤木明等、トポロジーの立場から J. Milnor, P. Orlik 等、可換環論の立場から M. Demazure, 渡辺敬一等により、多くの重要な研究がなされた。また、 $*$ -作用を持つ特異点のリンク（球面での切り口）は、Bieskorn の研究以来、トポロジーの立場から多くの重要な研究がなされており、また、微分幾何学でも Sasaki 多様体として活発な研究がされている。

・着想に至った経緯

上記のような退化族と特異点の理論の流れを背景に、本研究の代表者・都丸は1998~2005年の間、退化族と特異点の関係を研究した。始めに、 $z^n=f(x,y)$ なる超曲面特異点がKodaira特異点である条件を求めた[Math. Z., 236, (2001), 133-149]。次に業績欄論文2005年[1]において、退化から特異点を導く種々の手続きを考え、それがいつKodaira特異点になるか研究した。業績欄2006年[1]においては、退化族を用いてPencil種数という特異点の不変量を定義し、その性質を調べた。以上では、退化族に対し、それに付随した特異点を調べるといった方向での研究が中心だった。

しかし、数年前から逆方向の問題を意識するようになった。それは、特異点論で重要とされるクラスに対応する退化族を調べるといったものである。2次元に限らず、最もよく研究されている特異点のクラスは \mathbb{C}^* -作用を持つ場合である。それにも関わらず、これに対応する \mathbb{C}^* -作用を持つ退化族の研究(定義も)はない。しかし、2006年度論文[1]での結果から特異点と退化族は密接に関係する事が分かる。このような経緯から、代表者・都丸は近年 \mathbb{C}^* -作用を持つ退化族を、“複素全平面 \mathbb{C}^2 をパラメーター空間とする退化族の全空間に \mathbb{C}^* が作用し、そのファイバーリング写像と同変なもの”として定義し、具体例の計算などを開始するに至った。また、退化との関係という観点から見ると、 \mathbb{C}^* -作用を持つ特異点の性質について、Kodaira特異点であるための条件や、Pencil種数の公式を求めるといった基本的問題も、手つかずであると認識した。以上が、本研究を着想するに至った経緯である。

2. 研究の目的

以下、 \mathbb{C}^* -作用を持つ特異点(退化族)は \mathbb{C}^* -特異点(退化族)と略記する

(1) 2次元 \mathbb{C}^* -特異点に対し閉リーマン面退化族に関連する諸性質を調べる。種々の具体例について、特異点上の正則関数を特異点解消空間に引き上げ、それで決まる

因子の計算をプログラミングし、パソコンで計算します。これに基づき、 \mathbb{C}^* -特異点に対し、Pencil種数の公式を求め、Kodaira特異点、Kulikov特異点になるための条件を求める

(2) 閉リーマン面の \mathbb{C}^* -退化族の複素解析型の決定条件を求める。これまでに行った具体例の計算を再検討し、複素解析型を決定する条件を求め、ファイバーリング写像の具体的表示を与える

(3) 閉リーマン面の \mathbb{C}^* -退化族に付随した \mathbb{C}^* -特異点の間の双対性を調べる。ある種の線織曲面から構成される \mathbb{C}^* -退化族に対し、2個の \mathbb{C}^* -特異点が自然に決まる。いくつかの具体例の計算から、それらの中には、定義式や不変量などにある種の双対性が観察される。これを系統的に調べ、一般的な状況で問題を整理設定して研究を行う。

(4) 2次元 \mathbb{C}^* -特異点上の正則関数 f に対し、これに付随する \mathbb{C}^* -退化族のモノドロミー群と f のMilnorモノドロミー群との比較。曲面の写像類群との関連も調べる。Milnor束は通常、非特異点の周りの正則関数に対し定義されるが、Le Dung Trang等はこれを一般化し、特異点上の正則関数のMilnor束を考え、モノドロミー群を研究した。 \mathbb{C}^* -特異点 (X, o) とそれ上の \mathbb{C}^* -不変な正則関数 f に対し、 $\pi: (Y, E) \rightarrow (X, o)$ を \mathbb{C}^* -同変な特異点解消とすると、 \mathbb{C}^* -退化族 $\Phi: S \rightarrow \mathbb{C}^*$ で $(\Phi^*Y \rightarrow Y)$ への制限 $= f \circ \pi$ を満たすものが存在する事を、正則直線束の全空間の適当な改変上適当な有理型関数を考える方法で、最近、都丸は証明した(研究業績2006年[2])。この場合に、

退化 Φ の Picard-Lefschetz 理論から導かれるモノドロミー群と、 $f: (X, o) \rightarrow C$ の Milnor モノドロミー群との比較をする。また、曲面の写像類群との関連も調べる。

3. 研究の方法

本研究は代数・複素解析幾何学、トポロジー、可換環論など、多岐の分野に関係し、国内外の多くの人との交流を必要とするため、旅費が主体である。なお、代表者・都丸は国内外の研究者と頻繁に交流し、本研究遂行に必要な人的ネットワークを持ち、特異点研究を20年間ほど継続し、必要な文献等を揃えるなど、研究環境の整備を十分に行ってきた。

第1段階: 目標(1)の研究の準備をする。

まず最初に、種々の C^* -特異点 (X, o) に対し、 (X, o) のアフィン環の同次の元を、特異点解消空間上に引き上げ、その作る因子の計算のためのパソコン用プログラミングを行います。これを用いて、極大イデアルサイクルを求めるなど、目標(1)の遂行に向けた種々の実験的計算を行う。

第2段階: 目標(1)の研究を遂行する。

C^* -特異点の解析構造の決定条件は、藤木、Pinkhamにより決定されています。また、Negative直線束の零切断をつぶしてできる C^* -特異点については、都丸が業績2006年度[1] §3で、Kodaira または Kulikov 特異点になるための必要十分条件を求めている。これらの結果や、第1段階での計算に基づき、分担者を始め各方面の専門家との議論を深め目標を目指す。

第3段階: 目標(2)の研究を遂行する。

これまで行った具体例の計算に基づき、目標(2)の遂行を目指す。第2段階と同様、分担者を始め、各方面の専門家との活発な交流を致します。

以上の 第1～3段階の遂行のため、以下のような予算計画を立てた。

* 都丸は日本大学文理学部で行われる特異点セミナー（月に1～2度）に出席し、渡辺敬一、泊昌孝、石井志保子などの諸氏と定期的な交流を行う。都丸はこのセミナーに20年以上出席し多くの情報と刺激が得てきた。 (12万円)

* 学会や研究集会に出席し、情報収集と研究連絡を行う。 . . . (12万円)

* 分担者である足利氏、奥間氏と研究連絡を行う。本研究の為に両氏が群馬を来訪する場合は、旅費を当方で負担する。 . . . (12万円)

* C^* -作用を持つ特異点論に関する先駆者である大阪大学の藤木明氏を訪問し、本研究の結果に関し意見を伺いたいと考えている。 (6万円)

* 目標④の準備の為、モノドロミー理論の権威である Le Dung Trang (Trieste ICTP 所長) を1～2週間ほど訪問することを予定している。 . . . (22万円)

以上の諸氏との交流は、業績[1], [2]の研究過程でも行われていたものであり、本研究の遂行においても是非必要である。

* 第1,4段階のために、ノートパソコンとUSBメモリーを購入する。 . . . (22万円)

4. 研究成果:

数学的な内容は概要に記述した通りである。これらは、下の論文と、現在投稿中の論文「 C^* -equivariant degenerations of curves and normal surface singularities with C^* -action」にまとめられている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

[1] Complex surface singularities and degenerations of compact complex curves .

著者 : Tomaru Tadasi (単著)

Demonstratio Mathematica 42(2) 2010
39-59 (査読有り)

[学会発表] (計2件)

[1] 海外シンポジウム1回

研究集会名 : Singularities in Aarhus'

講演タイトル : Degenerations of compact complex curves and their cyclic coverings.

発表日 : 2010年8月19日、発表者 : 都丸 正、
場所 : デンマーク・オーフス市オーフス大学。

[2] 国内研究集会1回 : 多変数関数論冬セミナー。講演タイトル : リーマン面の C^* 作用付きの退化族と C^* 作用付き二次元特異点について。発表日 : 2009年12月20日、発表者 : 都丸 正、場所 : 熊本大学理学部。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

都丸 正 (TOMARU TADASHI)

群馬大学・医学部・教授

研究者番号 : 70132579