

機関番号：12605

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540066

研究課題名 (和文) ワイル群やルート系に関連する幾何学の研究

研究課題名 (英文) Research on geometry related to Weyl groups and root systems

研究代表者

関口 次郎 (SEKIGUCHI JIRO)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：30117717

研究成果の概要 (和文)：

階数 3 の既約な実鏡映群の判別式の零点集合は斎藤自由因子である。本研究において、これらの判別式集合と類似の 3 次元アフィン空間の斎藤自由因子を構成し、分類した。そして単純特異点の変形族との関係を明らかにした。つぎにこのような超曲面に沿って特異点を持つ一意化方程式を構成することに成功し、分類することもできた。構造についていくつかの成果を得た。これらの結果を階数 3 の既約な複素鏡映群の場合にも拡張した。

研究成果の概要 (英文)：

The zero set of the discriminant of an irreducible real reflection group is known to be a Saito free divisor. In this research project, we construct and classify Saito free divisors in a 3-dimensional affine space. Moreover we clarify the relationship between such divisors and families of deformations of simple curve singularities. As a next stage, we succeeded to construct systems of uniformization equations with singularities along such divisors and classified them. We also obtained some results of the structures of them. We could generalize these results to the case of complex reflection groups of rank three.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数学、特異点

科研費の分科・細目：数物系科学・数学・幾何学

キーワード：ワイル群、ルート系、斎藤自由因子、対数的ベクトル場、一意化方程式

1. 研究開始当初の背景

斎藤自由因子はルート系の判別式の零点集合と類似の性質を持つ。その存在について、研究開始当初はあまり知られていなかった。また、そのような超曲面に沿って特異点を持つ一意化方程式についてもほんの少しの例しか知られていなかった。このような状況のもとで、まずは斎藤自由因子を構成しその性

質を調べることが本研究の動機である。

2. 研究の目的

本研究では次のテーマを主要目的とした。
(1)アフィン 3 次元空間の斎藤自由因子の構成とその幾何学的性質を調べる。E₆, E₇, E₈ 型単純特異点、さらにアーノルドの 14 種の例外的特異点族と関係する平面曲線の 1 パラメ

一変形族から構成される斎藤自由因子の幾何学的性質，一般化されたルート系との関係などを調べた。

(2)実射影平面の直線配置を考察する。これらをワイル群，ルート系との関係に注目して研究する。実射影平面の8直線の分類が目的である。配置の組み合わせの性質を E_8 型ルート系の言葉に翻訳して、実射影平面の単純8直線配置の詳細な分類を完成する。

3. 研究の方法

研究目的(1)については、主に研究代表者が担当した。アーノルドが分類した14種類の例外型特異点のうちで8種類の特異点の変形族から媒介変数を特別な形にすると3次元空間の斎藤自由因子を構成できる。このアイデアを実行した。実施にあたっては、数式処理システムRisa/Asirを使用して計算することが有効である。連携研究者の野呂教授が計算の実行に協力した。また代表者は有限ルート系との関係も調べた。

研究目的(2)については、連携研究者の福井教授との共同研究の形態で実施した。代表者が理論的な側面を担当し、福井教授は数式処理システムを援用して、理論的な予測の成否を検証することを担当した。

4. 研究成果

(1)実既約鏡映群の判別式の零点集合は斎藤自由因子になる。3変数の場合に、これらの判別式と類似の性質をもつ多項式を定義しそして分類した。これらの多項式は17種類存在することがわかった。階数3の既約な実鏡映群の判別式と関係し、また平面曲線の例外型単純特異点の1媒介変数の同変形族と関係することも示した。

(2)(1)で説明している17種類の多項式のb関数を決定した。これに関して、野呂教授は多項式とそのb関数との幾何学的な関係を調べた。

(3)14種類のアーノルドの意味での例外型特異点のなかには2変数で定義できるものが7種類ある。これらの特異点の場合に、(1)の結果を拡張した。特に、階数3の既約複素鏡映群の判別式もこのようにして構成した因子になることも示した。またこのような斎藤自由因子は有限ルート系と対応するものがあることも示した。この成果を得る過程で、連携研究者の野呂教授は複雑な計算の処理を担当した。

(4)(1)で求めた17種類の斎藤自由因子に沿って特異点をもつ一意化方程式を分類した。これらは本質的には2変数で解空間が3次元である微分方程式系である。アップルの超幾何微分方程式には2変数で解空間が3次元であるが、簡単な変数変換ではそれらに帰着できない。根拠のひとつは、 H_3 型鏡映群の場合

の現象である。したがってこれまでに知られていない微分方程式を構成した可能性がある。

(5)正2面体群と関係する3次元斎藤自由因子を構成した。この因子は(3)で言及したアーノルドの例外型特異点のひとつの拡張とみなせる。さらにこの超曲面に沿って特異点をもつ一意化方程式のうちでD加群として商をもつものを調べた。この場合にガウスの超幾何関数による表示をもつ解と超楕円積分を使った解によって、基本解を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計13件)

(1)J. Sekiguchi, Systems of uniformization equations along Saito free divisors and related topics, Proceedings of Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University, 査読有, vol.43 (2010), pp.83-127.

(2)J. Sekiguchi, Systems of uniformization equations related with dihedral groups, Kumamoto J. Math., 査読有, vol.23 (2010), pp.7-26.

(3)M. Kato and J. Sekiguchi, Reflection subgroups of the monodromy groups of Appell's F_4 , Kyushu J. Math., 査読有, vol.64 (2010), pp.281-296.

(4)K. Nishiyama, M. Noro, Stratification associated with local b-functions, Journal of Symbolic Computation, 査読有, vol.45, No.4 (2010) pp.462-480.

(5)M. Noro, New algorithms for computing primary decomposition of polynomial ideals, in Proc. ICMS 2010, 査読有, LNCS 6327, (2010), pp.233-244.

(6)J. Sekiguchi, A classification of weighted homogeneous Saito free divisors, 査読有, J. Math. Soc. Japan, vol.61 (2009), pp.1071-1095.

(7)H. Nakayama and J. Sekiguchi, Determination of b-functions of polynomials defining Saito free divisors related with simple curve singularities of types E_6, E_7, E_8 , Kumamoto J. Math., 査読有, vol.22 (2009), pp.1-15.

(8)J. Sekiguchi, Reflection groups of rank three and systems of uniformization equations, Belgorod State Univ. Scientific Bulletin, Mathematics Physics, 査読無, vol.13 (2009), pp.77-88.

(9)M. Noro, Modular algorithms for computing a generating set of the syzygy

Module, Proceedings of CASC2009, 査読有, LNCS 5743 Springer, (2009), pp.259-268.

(10) 関口次郎, 鏡映群と一意化方程式, 表現論シンポジウム 2009, 講演集, 査読無, pp.44-55.

(11) 関口次郎, Saito free divisors and integrable connections, 数理解析研究所講究録, 査読無, vol.1662 (2009), pp.102-135.

(12) J. Sekiguchi, Studies on systems of six lines on a projective plane over a prime field, J. Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 査読有, vol. 2 (2008), pp.41-50.

(13) J. Sekiguchi, Three dimensional Saito free divisors and singular curves, J. Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 査読有, vol. 1 (2008), pp.33-41.

[学会発表] (計 25 件)

(1) J. Sekiguchi, A Schwarz map of Appell's F_2 whose monodromy group is related to the reflection group of type D_4 , Mathematics Seminar at Galatasaray University (Istanbul, Turkey), (March 2011)

(2) J. Sekiguchi, Discriminants of polynomials and discriminants of real and complex reflection groups, The 10th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory, 九州大学(2011年2月)

(3) J. Sekiguchi, Saito free divisors and holonomic systems, The 6th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar, 鹿児島大学(2011年2月)

(4) J. Sekiguchi, Saito free divisors in a four dimensional affine space, Workshop on Geometry and Analysis of Discriminants, IPMU(東京大学)(2011年2月)

(5) 関口次郎, 斎藤自由因子に沿って特異点を持つ微分方程式について, 超幾何方程式研究会 2011, 神戸大学理学部(2011年1月)

(6) 関口次郎, 階数 3 の複素鏡映群の判別式集合に沿って特異点を持つ一意化方程式について(加藤満生氏との共同研究), 古典解析ミニ集会, 東京大学大学院数理科学研究科(2010年12月)

(7) J. Sekiguchi, Saito free divisors, uniformization equations and related topics, CIMPA-TUBITAKI Summer School "Commutative Algebra and Applications to Combinatorics and Algebraic Geometry", Galatasaray University (Istanbul, Turkey), (September 2010)

(8) J. Sekiguchi, Saito free divisors, systems of uniformization equations and related topics, 18th International

Conference on Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis, University of Macau (Macau, China) (August, 2010)

(9) 関口次郎, 正 2 面体に関係する超楕円曲線の一意化方程式について, ミニワークショップ「微分作用素と剛性」, 九州大学大学院数理学(2010年7月)

(10) 関口次郎, 一意化方程式の解について, 古典解析セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科(2010年5月)

(11) 関口次郎, 斎藤自由因子と一意化方程式系, 研究集会「関数方程式における線形と非線形の融合」, 電気通信大学(2010年3月)

(12) J. Sekiguchi, Holonomic systems and fundamental groups---The case of Saito free divisors in C^3 , Workshop 'Geometry of lattices and infinite dimensional Lie algebras', IPMU(東京大学)(2010年3月)

(13) 関口次郎, 微分方程式と基本群の関係, Accessory Parameter 研究会, 熊本大学(2010年3月)

(14) 関口次郎, 3次元空間の単純型斎藤自由因子に沿って特異点を持つ微分方程式について, 熊本大学大域解析セミナー, 熊本大学(2010年2月)

(15) 関口次郎, 対数的自由因子の補空間の基本群と一意化方程式, 筑波大学解析セミナー, (2010年1月)

(16) 関口次郎, 単純型斎藤自由因子に沿った積分可能接続について, 近畿大学数学講演会, 近畿大学(2009年12月)

(17) J. Sekiguchi, Systems of uniformization equations and hyperelliptic integrals, Seminar at IPMU, IPMU(東京大学)(2009年12月)

(18) 関口次郎, 鏡映群と一意化方程式, 表現論シンポジウム 2009, 沖縄県宜野湾市健康文化村(2009年11月)

(19) J. Sekiguchi, Systems of uniformization equations and hyperelliptic integrals, Workshop "Complex Analysis and its Applications", Moscow Session of Sino-Russia Symposium, Institute for Control Sciences RAS (Moscow, Russia) (October 2009)

(20) J. Sekiguchi, Uniformization equations with respect to Saito free divisors and related topics, JARCS 2009 Australian-Japanese real and complex singularities workshop, University of Sydney (Sydney, Australia) (September 2009)

(21) 関口次郎, 実射影平面の 8 直線の配置と E_8 型ルート系, 成木勇夫先生退職記念研究会「表現的幾何」, 名古屋大学大学院多元数理(2009年3月)

(22) 関口次郎, 部分ロンスキアンに関する問題提起, 研究集会「Workshop on Accessory Parameter at Kumamoto」, 熊本大学(2009年2月)

(23) 関口次郎, Saito free divisors and integrable connections, 研究集会「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」, 数理解析研究所(京都大学)(2009年2月)

(24) 関口次郎, Unitary reflection groups and uniformization differential equations, 微分方程式と対称空間(大島利雄先生還暦記念研究集会), 東京大学大学院数理科学(2009年1月)

(25) J. Sekiguchi, Unitary reflection groups of rank three and Saito free divisors, Workshop-2008, Geometry and Analysis on Complex Algebraic Varieties, Independent University of Moscow (Moscow, Russia) (September 2008)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

関口 次郎 (SEKIGUCHI JIRO)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号: 30117717

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

福井 哲夫 (FUKUI TETSUO)

武庫川女子大学・生活環境学部・教授
研究者番号: 70218890

野呂 正行 (NORO MASAYUKI)

神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50332755