様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　６　月　１５　日現在

機関番号：12611
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008　～　2010
課題番号：20540067
研究課題名（和文）　擬リーマン幾何学における対称性と等質性

研究課題名（英文）　The symmetry and the homogeneity in pseudo-Riemannian geometry

研究代表者　　塚田　和美（TSUKADA　KAZUMI）
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授
研究者番号：30163760

研究成果の概要（和文）：擬リーマン幾何学における対称生と等質性に関わり次のような課題を追求し、成果を得た。共形平坦等質ローレンツ多様体の分類問題を進展させた。まだ、分類が完成したわけではないが、リッチ作用素の型によって場合分けを行い、その多くの場合に等質ローレンツ多様体を決定することができた。４次元擬ユークリッド空間内の光錐の空間的曲線から３次元双曲空間のホロ円曲面を構成する方法を導き、そのようにして得られた曲面の幾何学的性質、特に特異点の分類について結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied the following subjects on the symmetry and the homogeneity in pseudo-Riemannian geometry .We developed the classification problem of conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds. For almost all types of the Ricci operators, we have solved the construction and the classification problem. We construct horocyclic surfaces in hyperbolic 3-space associated with spacelike curves in the lightcone and classify their singularities using invariants of corresponding spacelike curves.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：無限小等質空間、共形平坦等質ローレンツ多様体、ホロ円曲面

１．研究開始当初の背景

正定値計量を備えた多様体はリーマン多様体と呼ばれ、計量が不定値の場合は擬リーマン多様体と呼ばれる。特に、不定値内積をもつ実線型空間を擬ユークリッド空間という。本研究では擬リーマン幾何学における対称性と等質性に関わり次のような課題を明らかにすることを目標とした：
１．擬ユークリッド空間の対称部分多様体の構成と分類
２．擬リーマン多様体における等質性を曲率テンソルの観点から明らかにすること

数学においてリーマン多様体に関する幾何学は大いに発展し、様々な課題に対し、興味深い理論、結果が得られている。同じような課題について擬リーマン多様体の場合に研究しようと試みると、リーマン多様体の場合には現れない様々な困難や複雑な現象が生ずる。一方、物理学特に相対論や宇宙論（時空の幾何学）の立場からは擬リーマン多様体での理論が望まれており、擬リーマン幾何学を発展させることは数学の進歩以外にも相対論や宇宙論などへの応用に関わってその意義と重要性をもつ。本研究では、擬リーマ

ン幾何学における対称性と等質性を主題に上記の課題を明らかにすることを目標とした。

2．研究の目的

上記第１項で述べた 2 つの課題について、その目的をより具体的に述べる。

課題１について。対称部分多様体は部分多様体論における対称空間のアナロジーとして次のように定義される:

連結擬リーマン多様体 M の連結（正則）擬リーマン部分多様体 S は、S の各点 p で次の性質を満たす M の等長変換 t_p が存在するとき、対称部分多様体とよばれる:

$$t_p(p)=p,\ t_p(S)=S,\ (t_p)_*X=-X \quad (X\in T_pS),$$

$$(t_p)_*\xi=\xi \quad (\xi\in T_p^{\perp}S)$$

ここで T_pS、$T_p^{\perp}S$ はそれぞれ点 p における S の接空間、法空間を表す。

リーマン対称空間の対称部分多様体の分類は、（本研究代表者を含む）日本、ドイツを中心とする研究者の寄与を経て、最近完成した。リーマン対称空間から擬リーマン対称空間の場合への拡張を考える際に最初に取り組むべき対象は、擬ユークリッド空間の対称部分多様体であろう。

課題２について。擬リーマン多様体の本質的な局所不変量である曲率テンソル R 及びその共変微分 $\nabla R, \nabla^2 R, \cdots, \nabla^i R, \cdots$ の情報から、擬リーマン多様体の等質性や局所等質性を論ずる。ここで、等長変換群が推移的に作用する擬リーマン多様体を等質空間といい、任意の２点に対し一方の点を他方の点に移す局所等長変換が存在するとき局所等質空間という。任意の２点 $p,q\in M$ に対し、線型等長写像 $\phi: T_pM \to T_qM$ が存在して、

$$\phi^*(\nabla^i R)_q=(\nabla^i R)_p \quad i=0,1,\dots,k.$$

（即ち、どの点でも曲率テンソルやその高階共変微分のテンソルが同じという条件）が成り立つとき、擬リーマン多様体 M を k-曲率等質空間という。

リーマン多様体の場合には、多様体の次元 n に関わる有限の整数 k(n)が存在し、k(n) -曲率等質ならば、局所等質であるという Singer による著しい定理（1960）が知られており、この定理がこの方面の研究の起源になっている。その後 1980 年代終わりから Kowalski,Tricerri,Vanhecke らによってリーマン多様体の等質性と曲率テンソルに関わる研究が精力的に行われ、関川浩永、高木斉、本研究代表者ら日本人研究者も大きな貢献をしている。例えば、0-曲率等質だが局所等質とはならないリーマン多様体の例も多く構成されている。ちなみに 1-曲率等質だが局所等質とはならないリーマン多様体の例はまだ知られていない。

擬リーマン多様体で同様な課題を設定すると、リーマン多様体の場合には起こらなかった現象が見出されることが分かってきた。例えば、Gilkey and Nikcevic (2005)は、各自然数 k に対し、k -曲率等質だが、局所等質とはならない擬リーマン多様体の例を構成した。この例はその曲率テンソルが、ある擬リーマン対称空間と同じになっていることでも興味深い。

このような中で２に関するより具体的な課題として

(1) 擬リーマン多様体に対し、Singer の無限小等質空間の理論を整備すること。即ち擬リーマン多様体における等質性を曲率テンソルの観点から明らかにすること。

(2) 上記の理論を、等質擬リーマン多様体に関わる様々な問題に応用すること。

に取り組んだ。

3．研究の方法

本研究においては、リーマン幾何学的な設定では現れない困難さを克服するようなアイデアを見出すところにポイントがある。そのために次のような方法、観点で研究を進めた：

○可解 Lie 環（群）の構造論、表現論の精妙な応用により擬ユークリッド空間の対称部分多様体や擬リーマン等質空間の構造を解明する。

○計量によらず接続に依拠した不変量やその幾何学(アファイン微分幾何学)の観点から論ずる。

○対称変換に関する Petrov による“標準形”を本格的に適用する方法を開発し、展開する。

○曲率テンソルの代数的性質を詳細に調べる方法を開発、展開する。

4．研究成果

本研究で得られた主な成果は次のとおりである：

(1) 野水による Killing generators の方法を用いることにより、擬リーマン多様体の場合にも Singer の無限小等質空間の理論が成り立つことを証明することができた。

(2) 上記(１)の理論を適用し、共形平坦等質ローレンツ多様体の分類問題を進展させることができた。まだ、分類が完成したわけではないが、リッチ作用素の型によって場合分けを行い、その多くの場合に等質ローレンツ多様体を決定することができた。これらの結果は、本多恭子との共著論文としてまとめられ現在投稿中である。

(3) ４次元擬ユークリッド空間内の光錐の空間的曲線論を整備した。さらに、光錐の空間的曲線から３次元双曲空間のホロ円曲面を構成する方法を導き、そのようにして得られた曲面の幾何学的性質、特に特異点の分類に

ついて結果を得た。これらの結果は、滝沢千恵との共著論文として発表された。
(4) 擬ユークリッド空間の対称部分多様体の例の構成を動機として、次のような研究を研究室の院生とともに行った。擬直交群の岩沢分解におけるベキ零部分群による擬ユークリッド空間への標準的な作用について、その軌道の性質を調べた。全臍的平坦部分多様体、退化する計量をもつ部分多様体など興味深い例が現れた。より一般的な方法を検討し、擬ユークリッド空間の対称部分多様体の例の構成方法に発展させたい。
(5) 対称部分多様体の例の構成を動機として、擬リーマン対称空間の構成、分類理論について概括し、特に Kath and Oldrich による最新理論について解説する講演を行った。

擬リーマン幾何学における等質性に関しては、その理論と応用について前進させることができた。一方擬ユークリッド空間の対称部分多様体については、その構成方法を探る試みをし、また擬リーマン対称空間の構成、分類の最新理論にアイデアを得ようと試みたが、まだ十分な成果に結びついていない。今後も引き続き研究を進めたい。

以下では、(2) 共形平坦等質ローレンツ多様体の分類問題について、詳述する。

共形平坦等質リーマン多様体は、高木斉(1975)によって分類され、単連結の仮定のもとで、$M^n(k)$、$M^m(k)\times M^{n-m}(-k)$ $(2 \le m \le n-2)$、$M^{n-1}(k)\times R$ のいずれかと等長的である。ここで、$M^m(k)$ は一定断面曲率 k $(k\neq 0)$ をもつ単連結完備リーマン多様体である。結局、共形平坦等質リーマン多様体はすべてリーマン対称空間になっている。一方、3 次元共形平坦等質ローレンツ多様体は本多-塚田(2007)によって分類され、対称空間にならない例も多く存在する。このように、擬リーマン多様体の設定で同様の問題を考えるとリーマン多様体の場合に比べ状況は複雑である。本研究では、高次元共形平坦等質擬リーマン多様体の分類を目標に、特にローレンツ多様体の場合について考察した。

$(M^n{}_q,g)$ を指数 q の擬リーマン計量 g をもつ n 次元擬リーマン多様体とする。特に $q=1$ のとき、$(M^n{}_1,g)$ はローレンツ多様体と呼ばれる。擬リーマン多様体 $(M^n{}_q,g)$ が共形平坦であるとは、M の各点 p に対して、p の座標近傍 $(V;x_1,\ldots,x_n)$ と V 上の C^∞級関数 $\rho>0$ が存在して

$$g=\rho^2(-dx_1{}^2-\ldots-dx_q{}^2+dx_{q+1}{}^2+\ldots+dx_n{}^2)$$

と表せることである。擬リーマン多様体 $(M^n{}_q,g)$ が共形平坦であるための必要十分条件として次のようなものが知られている（以下簡単のため、$n \ge 4$ と仮定する）:
(i)M の曲率テンソル R が次のように表される：

$$R(X,Y)=AX\wedge Y+X\wedge AY,$$
$$A=1/(n-2)(Q-S/2(n-1)\,Id)$$

ここで Q は M のリッチ作用素, S は M のスカラー曲率である。
(ii)$M^n{}_q$ から $R^{n+2}{}_{q+1}$ の光錐
$\Lambda=\{\, x\in R^{n+2}{}_{q+1}-\{0\} \mid \langle x,x\rangle= 0 \,\}$ への等長はめ込みが存在する。

共形平坦等質擬リーマン多様体の分類問題を研究するわけだが、擬リーマン多様体の場合等質性から測地的完備性が導かれない等の事情で、大域的な分類は難しいと思われる。ここでは局所等長類による分類を考える。方法は (i) で導入された作用素 A 及びその共変微分$\nabla A, \nabla^2 A$, ・・・を調べ、その形を定めていくことによる。

作用素 A が（実線形変換として）対角化可能（リッチ作用素が対角化可能であることと同値）である場合は、A の相異なる固有値は高々 2 個であることが分り、リーマン多様体の場合と同様の結果が成立する。

定理 1 $M^n{}_q$ を n (≥ 3) 次元共形平坦等質擬リーマン多様体とする。 A が対角化可能であれば、$M^n{}_q$ は次のいずれかと局所等長である。
(1) 一定断面曲率をもつ擬リーマン多様体
(2) 一定断面曲率 $k\,(\neq 0)$ をもつ m 次元擬リーマン多様体と一定断面曲率 $-k$ をもつ n-m 次元擬リーマン多様体の積多様体 $(2 \le m \le n-2)$
(3) 一定断面曲率 k $(\neq 0)$ をもつ n-1 次元指数 q-1 擬リーマン多様体と 1 次元ローレンツ多様体の積多様体，または一定断面曲率 k $(\neq 0)$ をもつ n-1 次元指数 q 擬リーマン多様体と 1 次元リーマン多様体の積多様体

これ以降はローレンツ多様体に限って議論する。A が対角化可能でない場合は次が成立する：

定理 2 M^n を n (≥ 4)次元共形平坦等質ローレンツ多様体とする。A が(実線形変換として）対角化可能でなければ、A の形は次のいずれかとなる：

Case1

$$\begin{pmatrix} a & -b & & & & & & \\ b & a & & & & & & \\ & & \lambda & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \lambda & & & \\ & & & & & -\lambda & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$b \neq 0,\ a^2+b^2=\lambda^2$

Case 2
$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & & & & \\ 0 & \lambda & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & -\lambda & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\varepsilon=1$ or -1

Case3

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & \lambda & & & & & & \\ & & & \lambda & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda & & & \\ & & & & & & -\lambda & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -\lambda \end{pmatrix}$$

ここで、Case 1 では正規直交基底 $\langle e_1,e_1\rangle=-1$, $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j \geq 2)$, Case 2, 3 では擬正規直交基底 $\langle e_1,e_2\rangle=1$, $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j \geq 3)$, に関する行列表示。

各 Cases 毎に調べる：

Case 1. 定理 2 の行列表示で、$a=0$, $b=\lambda$, $\dim T_\lambda=\dim T_{-\lambda}$。ここで、$T_\lambda, T_{-\lambda}$ はそれぞれ固有値 $\lambda, -\lambda$ の固有空間を表す。特に $\dim M$ =偶数。さらに次で構成する例に局所等長となる。

例 R^m $(n=2m-2)$ の不定値内積 $\langle,\rangle$ を次で定義する：

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{m} x_i y_i$$

$\langle,\rangle$ の直交変換群の恒等変換を含む連結成分を $SO_+(1,m-1)$で表す。積 Lie 群 K を

$K = SO_+(1,m-1)\times SO(2)$
$\quad = \{(k_1,k_2) \mid k_1 \in SO_+(1,m-1),\ k_2 \in SO(2)\}$

とおく。$M(m,2{:}R)$を実 $m\times 2$ 行列全体のなす線形空間とする。$X,Y \in M(m,2{:}R)$ に対して、内積 (X,Y) を次で定義する。

$(X,Y) = \langle \mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1\rangle + \langle \mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2\rangle$
$X=(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)\quad Y=(\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2)$

K の $M(m,2{:}R)$ への作用を次で与える：

$(k_1,k_2)\times X \mapsto k_1 X k_2^{-1}$
$k_1 \in SO_+(1,m-1),\ k_2 \in SO(2),\ X \in M(m,2{:}R)$

K は (,) に関して、直交変換群として作用している。$m\times 2$ 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を c $(\neq 0)$ 倍した行列を X_o とおく。X_o は (,) に関して光的ベクトルである。K の作用による X_o の軌道を M とする。M は、$M(m,2{:}R)$における光錐Λの超曲面で、M への誘導計量はローレンツ計量となる。従って、(ii) によって共形平坦ローレンツ多様体となる。

Case 2. 定理 2 の行列表示はさらに制限され次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & & \\ 0 & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\varepsilon=1$ or -1, $\lambda \leq 0$

Case 2 $\lambda<0$：次で構成される例に局所等長になる。

例 E_i $(4 \leq i \leq n)$, F_{ij} $(4 \leq i<j \leq n)$, X_i $(1 \leq i \leq n)$ を基底とする実線形空間を ⟨k⟩ とおく。⟨k⟩ 上のかっこ積 [,] を次で定める：

$[E_i, E_j]=0,\ [E_i, F_{jk}]=\delta_{ij} E_k - \delta_{ik} E_j,$
$[E_i, X_1]=0,\ [E_i, X_2]=-X_i,\ [E_i, X_3]=c\,E_i,$
$[E_i, X_j]=\delta_{ij} X_1$
$[F_{ij}, F_{kl}]=-\delta_{ik} F_{jl}+\delta_{jk} F_{il}+\delta_{il} F_{jk}-\delta_{jl} F_{ik}$
$[F_{ij}, X_1]=0,\ [F_{ij}, X_2]=0,\ [F_{ij}, X_3]=0,$
$[F_{ij}, X_k]=-\delta_{ik} X_j+\delta_{jk} X_i$
$[X_1, X_2]=0,\ [X_1, X_3]=3c\,X_1,\ [X_1, X_j]=0$
$[X_2, X_3]=-\varepsilon/(2c)\,X_1+c\,X_2,\ [X_2, X_j]=0,$
$[X_3, X_j]=-2c\,X_j,\ [X_i, X_j]=0$
$(i,j,k,l \geq 4,\ c>0,\ \varepsilon=1 \text{ or } -1)$

このとき、上のかっこ積 [,] はヤコビの恒等式をみたし、⟨k⟩ は Lie 環になる。$\{E_i, F_{ij}\}$で張られる ⟨k⟩ の線形部分空間を⟨h⟩とする。⟨h⟩ は ⟨k⟩ の Lie 部分環となる。$\{X_1,\ldots,X_n\}$で張られる部分空間を⟨p⟩で表す。⟨k⟩を Lie 環としてもつ単連結 Lie 群を K とし、⟨h⟩ に対応する K の Lie 部分群を H と

する。このとき H は K の閉部分群になる。商多様体 K/H を M とおく。
商射影π:〈k〉→〈k〉/〈h〉を〈p〉に制限することにより、〈p〉と〈k〉/〈h〉とを同一視する。さらに、T_oM ≃〈k〉/〈h〉≃〈p〉が成り立つ。
〈k〉/〈h〉≃〈p〉上に内積 <,> を次で定める:
$<X_1,X_2>=1$, $<X_i,X_j>=\delta_{ij}$, $(3 \le i, j \le n)$
その他は 0
〈h〉の元による〈k〉/〈h〉への作用はこの内積 <,> に関して、歪対称になり、T_oM 上の <,> は H-不変内積となる。従って M 上に K-不変ローレンツ計量 g が定まる。このようにして得られたローレンツ多様体 (M,g) は共形平坦で、その A の形は case 2 $\lambda = -2c^2 < 0$ となる。

Case 2 $\lambda = 0$：Case 2 $\lambda < 0$ の場合と同様にして例を構成することができ、この例に局所等長となることも示される。

Case 3 定理 2 の行列表示はさらに制限され、$\lambda < 0$, $\dim T_{-\lambda} \le \dim T_{\lambda} - 2$ となることが分る。さらに固有値が１種類の場合、固有値が２種類である場合ともに例を構成することができる。ただ、決定するところまでは至っていない。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）

C.Takizawa and K.Tsukada, Horocyclic surfaces in hyperbolic 3-space ,Kyushu Journal of Mathematics,63(2009),269-284 (査読有)

〔学会発表〕（計４件）

① K. Honda and K. Tsukada, Conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds, International conference “Lie Transformation Groups and Complex Geometry” , 2010. 9.29(発表者は本多恭子）, Yuzawa, Niigata-Ken

② 塚田 和美,Horocyclic surfaces in hyperbolic 3-spaces 部分多様体論・湯沢 2008, 2008.11.28, 湯沢グランドホテル

③ 塚田 和美,擬リーマン多様体の等質性と曲率テンソル , 新潟微分幾何学研究集会「微分幾何学と概複素構造」 2008.11.6, 新潟大学

④本多 恭子,塚田 和美, n 次元共形平坦等質ローレンツ多様体, 第５５回幾何学シンポジウム 2008.8.22（発表者は本多恭子）, 弘前大学

６．研究組織

(1)研究代表者

塚田　和美（TSUKADA　KAZUMI）
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授

研究者番号：30163760

(2)研究分担者
無

(3)連携研究者
無