様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　6 月 21 日現在

機関番号：12611
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008～2012
課題番号：20540068
研究課題名（和文）　リッチフローの曲率基点評価

研究課題名（英文）　Base point estimates of the curvature tensor of the Ricci flow

研究代表者
戸田　正人（TODA MASAHITO）
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・准教授
研究者番号：80291566

研究成果の概要（和文）：基点における曲率の大きさと初期データのみに依存して曲率評価を得ることを目標として、リッチフローの解析を行った。この問題は特異性の解析と直接関連し、特に初期データによりリッチ平坦な特異性を排除することが重要であることをまず明らかにした。研究を進めるうちに実際にそれを実行することは一見するより難しく、従来の解析的評価の方法そのものを見直す必要を感じたため、おもにリッチフローの方程式自身を意味のある形で理解することを中心に研究を進めた。具体的には、計量の空間の適当な複素化を行うことにより、無限次元のケーラー構造を持つ相空間を考え、その上の力学系としてリッチフローを理解することを行った。現時点までに相空間のケーラーポテンシャルと正則ベクトル場のコーシーリーマン方程式を求めた。リッチフローを適当なベクトル場により生成されるフローとして理解するのが現在の目標である。

研究成果の概要（英文）：I investigate the Ricci flow to obtain the estimate of the curvature tensor which depends only on the tensor at the base point in question and the initial data. The analysis is directly related to singularity of the Ricci flow and I clarified that the goal is almost identical to exclude the singularity modeled on the Ricci-flat manifold, depending on the initial data, as a first step. I gradually realized that the exclusion is more difficult than it appears, and requires the completely new point of view of the framework of the analytic estimate. Hence I mainly concerned with the new interpretation of the equation of the Ricci flow itself. Specifically, I setup the phase space of the metric as a suitable complexification and gave it a Kaehler structure of infinite dimension and tried to interpret the Ricci flow as a dynamical system on the phase space. So far I specified the Kaehler potential of the phase space and the Cauchy Riemann equation of the holomorphic vector field. The next goal is to understand the Ricci flow as a flow generated by suitable vector field.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
２０１２年度	600,000	180,000	780,000
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：幾何解析

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：リッチフロー

１．研究開始当初の背景

（１）リッチフローによるペレルマンの３次元ポアンカレ予想の解決によりリッチフローの解析が強力な手法であることが明確になった。幾何解析的なアプローチで曲率などの仮定なしで空間の位相を決定することに成功した数少ない例であるという点がとくに衝撃的であった。これを踏まえて３次元以外の場合にリッチフローによる解析がどのような位相的結論を導くことができるか、という問題は当然次に考えるべきであるが、とくに４次元の微分位相幾何についてはどうか、というのが当初の主たる問題意識であった。

（２）その直後からリッチフローに関する研究が多く行われた。例えばペレルマンの議論で重要であった３次元特異極限の正曲率性が一般の次元では期待できないという例がいくつか得られた。また、一般の次元で曲率テンソルの仮定をリッチ曲率の仮定やスカラー曲率の仮定におきかえる議論も試みられたが、いずれも特異性を解析する際に必要となるスケール不変な局所的な仮定に置き換えるのではなく、大域的なリッチ曲率、スカラー曲率の仮定のもとに行う議論であった。この形の結論は直接特異性の解析には適用できない。

（３）ペレルマンの行った解析のうち、次元によらないものもある。これはエントロピーや簡約体積などの量を斬新な考察に基づいて導入し、その単調性を用いてスケーリング極限において体積崩壊が起こらないことを示した。単調性は初期データに対する依存を記述する有力な手段であり、この結論を精密化する研究が多く行われた。しかし、それらはリーマン幾何、測度論における凸性の一般化された記述形式を用いるもので、単調減少量の減少率を制御することは難しい。

２．研究の目的

（１）３次元におけるペレルマンの曲率評価は３次元に特有の特異極限の正曲率性を利用したものである。リーマン幾何における正曲率空間の比較定理が特異性を持つ空間（アレクサンドロフ空間）に対しても成り立つことをリッチフローの解析的性質とうまく併用して、特異性が生じた領域の基点における曲率と初期値のデータのみに依存して、領域の曲率評価を得るというものであった。このタイプの解析的評価に一般的な名称はないが、これを基点評価と呼ぶことにする。４次元以上の次元では曲率の基点評価に利用されている正曲率性が期待できないため、同じ議論が適用できない。これを解決するのが本研究の目的である。

（２）適当な基点の選び方と曲率の正規化の下で、局所的な極限を考えると、曲率基点評価は曲率条件をリッチ曲率などに緩めたアプリオリ評価の下での解析に帰着することができる。しかし一般のリーマン多様体の場合はリッチ曲率を有界に保ったまま、多様体が崩壊しうる。これを防ぐためには空間がリッチフローで発展していることを用いて、初期データに依存した評価を得る必要がある。特異極限の解析において初期データへの依存を記述する現実的な手法はリッチフローに沿って単調な量を探し、その量に依存する解析を行うということになる。ペレルマンの導入したエントロピーや簡約体積等の量はリッチフローに沿って単調減少性を持つが、残念ながらその減少率が制御できなければリッチフローが錘状の特異性を生じうるため、本研究の目的のためには用いることができない。新しい単調量を見出すことが目的の曲率評価を得るために必要な具体的な目標である。

３．研究の方法

（１）まず目的の曲率評価とリッチフローの特異性解析の関係を調べた。適切な基点と曲率正規化を行ってスケーリング極限を考えて、背理法の議論を行うとリッチフローのスカラー曲率に関する強最大値原理によりリッチ平坦な極限が得られる。正規化の選び方により得られる極限が局所的なものになったり、大域的なものになったりするが、これに関する技術的な問題を考察した。

（２）リッチフローに沿った単調量を探すための一般的な枠組みについて研究した。とくに与えられた確率測度を保つ変換群のもとで不変な汎関数について一般的に調べた。また、計量の空間上に与えられた１形式が具体的なテンソルを用いて記述されている場合、それが閉形式あるいは完全形式となるための条件を考察した。

（３）ペレルマンの導入したＬ－幾何と簡約体積の枠組みをリッチフローの余接空間上のハミルトン流に沿ったラグランジュ多様体の発展として解釈しなおし、シンプレクティック幾何的に研究を行なった。とくに簡約体積の単調性をこの観点から見直し、直接的な計算から導いた。

（４）計量の全体の空間を配置空間とするような無限次元の相空間を設定し、リッチフローをその上のフローとして理解するための枠組みを考えた。具体的には多様体上の計量全体の空間の余接空間を相空間とし、確率測度を介して、適当なシンプレクティックベクトル束上の複素構造全体の空間と同一視することにより、相空間上に無限次元ケーラー構造を与えた。この設定の下でリッチフローをその上の適当なベクトル場の生成するフローとして理解される。とくに確率測度を指定するごとに相空間の複素構造が指定されるので、ペレルマンの議論における付加構造としての確率測度が自然に一般化される。また、このとき、考えるフローは計量成分だけでなく、その運動量の成分も持つことになるが、これにも依存した汎関数を考えることにより、一般的な状況で新たな単調量を探す枠組みとなる。

４．　　研究成果

（１）曲率基点評価とリッチフローがリッチ平坦なモデルを持つ特異性を持つかどうか、という問題との関連を明らかにした。リッチ平坦な４次元多様体（自明なリッチフロー）の列でそのグロモフハウスドルフ極限としてリッチ平坦計量錘となるものが存在する。この例はしばしばリッチ曲率のスケール不変な評価がリッチフローの有効な評価を導かない例として引用されるが、この列は自明なリッチフロー列として、初期値も同時に特異極限を持つことになる。したがって初期値に依存するリッチ曲率のスケーリング不変な有界性がスケーリング極限の収束を保証する可能性があることを明確にした。また、このタイプの例においてエントロピーと簡約体積などはすべて有界に保たれることを明らかにした。したがって、研究目的に述べ

た新しい単調量はこの例において発散するような量でなければならない。

（２）多様体上に確率測度が与えられているとき、その上の計量の空間上で定義された汎関数が確率測度を保つ変換について不変であるための条件はペレルマンの導入したエントロピー汎関数の計算で重要な役割を果たす一般化されたビアンキ恒等式にあたる恒等式で与えられることを明らかにした。また、確率測度が与えられているとき、エントロピーと関連の深い汎関数についてこのビアンキ恒等式を具体的に導いた。さらに、行列ハルナックテンソルにより定められる１形式は汎関数の勾配としては得られないことを示した。

（３）多様体上に確率測度が与えられているとき、その上の計量全体の相空間（無限次元ケーラー多様体）に作用する変換群を研究した。ひとつの変換群は適当なシンプレクティックベクトル束のゲージ変換群である。これはケーラー構造を保つが、そのモーメント写像を求めた。もうひとつは多様体の微分同相群である。微分同相群の作用は一般には相空間の複素構造を保ち、さらに確率測度を保つ微分同相はケーラー構造も保つ。この場合にはそのモーメント写像を求めた。とくに確率測度の取替えは相空間のシンプレクティック構造を保つ複素構造の変換に対応し、確率測度を付加的な構造として指定することはケーラー形式を相空間に指定することに一般化されることがわかった。大域的なケーラーポテンシャル汎関数を具体的に与えた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計１件）
<u>Toda, M.</u>　“Scaling limits of the Ricci flow and monotone quantities”（2008 年１０月１７日　東北大学）International Workshop on Recent Development in Geometry

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.ocha.ac.jp/toda/

６．研究組織

(1)研究代表者
戸田　正人（TODA MASAHITO）
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・准教授
研究者番号：80291566

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし