様式C-7-2

自己評価報告書

平成　23　年　4　月　30　日現在

機関番号：13601
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008 ～ 2011
課題番号：20540070
研究課題名（和文）評価写像モデルによるリー群の可視化問題とシンプレクティック類の拡張に関する研究

研究課題名（英文）Studies on rational visibility problems of a Lie Group and extensions of symplectic classes by a model for the evaluation map

研究代表者
栗林 勝彦（KURIBAYASHI KATSUHIKO）
信州大学・理学部・教授
研究者番号：40249751

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：Sullivan モデル, c-シンプレクティック多様体, 写像空間, 特性類

１．研究計画の概要

研究の目的

1970年代に現れたQuillen, Sullivanによる有理ホモトピー論は，可換微分代数が作るモデル圏での対象，射の具体的表記を用いて幾何学及びトポロジーの問題を代数的問題に帰着させ，例えば測地線の無限存在問題等，多くの問題を解決してきた。また一方，写像空間によるホモトピー論は値域空間に内在する性質を効果的に捉える術を提供してきた。実際Lie群の分類空間の自由ループ空間のコホモロジー環は，Lie群の特性類間に在るSteenrod作用素による相互関係を強く反映し決定される。

本研究においては有理ホモトピー論を駆使することで，今まで取り扱いが困難だった写像空間のトポロジー的考察を進展させ，多様体のトポロジー的性質の解明に力点が置かれる。具体的な目標は，Brown, Szczarbaによる写像空間の有理モデル(B-Sモデル)と研究代表者により構成された評価写像モデルを用いて次の３つの問題を考察することである。

(1)連結な等質空間M＝G/H上の自己ホモトピー同値写像のつくるモノイドの恒等射連結成分aut_1(M)を考える。このときGのaut_1(M)における有理可視化問題。すなわちGのMへの標準的作用が誘導するGからモノイドaut_1(M)への写像が有理ホモトピー群上でどのような場合に単射になるかの考察。

(2)c-シンプレクティック多様体Mに対して得られる分類空間Baut_1(M)の特性類であるKedra-McDuff類のB-Sモデルによる解釈。

(3)シンプレクティック多様体(M,w)をファイバーにもつファイブレーションにおけるシンプレクティック類[w]の全空間のコホモロジー類への拡張問題

２．研究の進捗状況

上記研究の目的で述べられた３つの問題のうち(1)(2)を同時に考察してきた。研究開始から２年間の深い考察が実り，c-シンプレクティック多様体 M に対して,そこから得られる分類空間Baut_1(M)の特性類であるKedra-McDuff類にB-Sモデルによる解釈が与えられた。この解釈を用いて，Mのコホモロジー環が単生成である場合はBaut_1(M)の有理コホモロジーはKedra-McDuff類で生成される多項式環であるという美しい定理を得た。

加えて，ファイバーが完全交叉代数である場合にファイブレーションのLeray-Serreスペクトル系列が第２項で潰れるというHalperin予想に関連した結果も得た。具体的には，この予想が肯定的に解決されるための必要十分条件をB-Sモデルの言葉で記述することで，コホモロジーが完全交叉代数である空間Mをファイバーにもつ普遍ファイブレーションの全空間のコホモロジーをBaut_1(M)のコホモロジー環上の代数として決定した。これらの結果は論文として出版された(研究成果参照)。これにより研究目的の(2)が達成できたことになる。

さらに,上述研究過程で得たアイディア，すなわち等質空間へのLie群作用をモデルで表示する方法を確立したことにより，Mが等質空間G/Hである場合に，Lie

群Gのaut_1(M)における有理可視化問題を詳細に考察することが可能になった。結果，Gが可視化可能であるための必要十分条件が得られ，この認識原理に基づき具体的な等質空間に関して可視化次元を決定した。これらの結果は論文としてまとめられた。これにより第(1)の研究目的も達成できたことになる。

３．現在までの達成度

（１）当初の計画以上に進展している。

(理由)

研究開始後２年間で写像空間のB-Sモデルをより精錬し扱い易くすることに成功した。さらにモノイドaut_1(M)のモデルの情報をもとに,普遍ファイブレーションの全空間のコホモロジーに収束するcobar型Eilenberg-Mooreスペクトル系列を近似することが可能になった。これが鍵となり,(2)の考察が一気に進展した。これが計画以上に進展した理由である。

４．今後の研究の推進方策

(1)(2)の結果を踏まえて本年度すなわち研究の最終年度は(3)を考察する。考えるファイブレーションにおいて，その底空間が単連結である場合，ファイバーであるシンプレクティック多様体(M, w)が単連結ならば常にコホモロジー類[w]は拡張可能である。したがってここではファイバーがT^2k-分解可能である場合，すなわちMの有理ホモトピー型が単連結空間と2k-次元トーラスの直積である場合を考察し[w]が拡張可能であるための必要十分条件をモノイドaut_1(M)の分類空間の言葉で記述する。その具体的な計画内容は以下の通りである。

まず一般のファイブレーションを支配する M-普遍ファイブレーションを理解するために，その全空間のコホモロジー環H^i(Maut_1(M)) (i= 1,2)の生成元に関する情報が必要になる。さらに与えられたファイブレーションの分類写像とそれらの生成元との関係を明らかにしなければならない。そこでH^*(Maut(M))をcobar型のEilenberg-Mooreスペクトル系列を用い低次元で求め，その生成元とM-普遍ファイブレーションのLeray-Serreスペクトル系列上に現れる元とを比較する。これにより類[w]が拡張可能であるための必要十分条件を分類空間の言葉で書くことが出来るであろう。すなわちコホモロジーH^i(Maut_(M))を仲介者として利用し拡張問題を考察するのである。

一般に(M, w)がT^2k-分解可能であってもコホモロジーH^*(aut(M))の構造は複雑である。したがってシンプレクティック多様体の適切なSullivanモデルを選ぶことが上述のスペクトル系列の計算の鍵になると考えている。そこでaut_1(M)のより洗練されたモデルを構築するために近年Lambrechts, Stanleyによりその存在が明らかになった多様体のPoincare双対代数モデルを利用することを計画している。

５． 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① <u>Katsuhiko Kuribayashi</u>, Rational visibility of a Lie group in the monoid of self-homotopy equivalences of a homogeneous space, to appear in Homology, Homotopy and Applications.

② <u>Katsuhiko Kuribayashi</u>, On the rational cohomology of the total space of the universal fibration with an elliptic fibre, Contemporary Math. vol. 519, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 165-179.

〔招待講演〕（計　１　件）

① <u>Katsuhiko Kuribayashi,</u> Rational models for function spaces and applications, Homotopy Theory of Function Spaces and Related Topics, MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH, Germany, 6 April, 2009

〔その他〕

ホームページアドレス

http://marine.shinshu-u.ac.jp/~kuri/