様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24　年　6　月　12　日現在

機関番号：13601
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008　～ 2011
課題番号：20540070
研究課題名（和文）評価写像モデルによるリー群の可視化問題とシンプレクティック類の拡張に関する研究

研究課題名（英文）Studies on rational visibility problems of a Lie Group and extensions of symplectic classes by a model for the evaluation map

研究代表者
栗林 勝彦（KURIBAYASHI KATSUHIKO）
信州大学・理学部・教授
研究者番号：40249751

研究成果の概要（和文）：階数１の等質空間をあたえる単純リー群に対して，その有理可視化問題を考察し，その問題を解決した。さらにシンプレクティックファイバーを持つファイブレーションにおいて，そのファイバーから２次元トーラスが有理ホモトピー論的に分離可能である場合を考察する。この時， ファイバーのシンプレクティック類が全空間の２次コホモロジー類に拡張可能であるための必要十分条件を得た。これら研究のための主な道具は Brown と Szczarba による写像空間の Sullivan モデルと評価写像の有理モデルである。

研究成果の概要（英文）：We have solved the rational visibility problems of simple Lie groups which give homogeneous spaces of rank one. In particular, the visible degrees are determined explicitly for all the cases of such Lie groups. Moreover, for a fibration with symplectic fibre, we discuss a necessary and sufficient condition for the cohomology class of the symplectic form to extend to a cohomology class of the total space of the fibration provided the 2k-dimensional torus is rationally separable from the fibre. Our main tools for the study are the Sullivan model for a function space due to Brown and Szczarba and a rational model for the evaluation map.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：サリバンモデル, c-シンプレクティック多様体, 写像空間, 特性類

1. 研究開始当初の背景

1970年代に現れたQuillen, Sullivanによる有理ホモトピー論は，多くの幾何学的またはトポロジーの問題を可換微分代数の問題に帰着させ，解決してきた。事実de Rham-Sullivan対応は有理化空間のホモトピー圏を可換微分代数のホモトピー圏が同値であることを保障している。こうして有理化空間， 写像に対応する微分代数やその対象の間の射(モデルと呼ばれる)の性質から原理的にはもとの空間の特徴を捉えることが可能になる。

例えば測地線の無限存在問題の解決も多様体の自由ループ空間に付随するSullivanモデルの詳細な考察により解決されている。これはVigue, Sullivanによる７０年代後半の結果である。

一方，写像空間によるホモトピー論は値域空間に内在する性質を効果的に捉える術を提供してきた。実際，研究代表者の９０年代後半の結果より，Lie群の分類空間の自由ループ空間のコホモロジー環は，特性類間に現れるSteenrod作用素の相互関係を強く反映し決定されることがわかる。このようにトポロジー研究における写像空間の有用性は認識されてはいるが，これら空間のホモトピー論は一般に難解である。したがって写像空間のホモトピー論を展開するために有理ホモトピー論の高い計算可能を頼ることはごく自然であろう。

Eilenberg-MacLane空間を値域空間に持つ写像空間のホモトピー群は５０年代後半Thomにより考察された。その結果を用いてHaefligerは８０年代前半に写像空間の Sullivan モデルを構成したが，モデルを決定する微分が次元に関して帰納的に定義されているため，具体的計算が可能になるものは稀であった。

９０年代後半Brown, Szczarbaにより、計算可能性の高い写像空間の Sullivan モデルが構成された。写像空間の有理ホモトピー群を完全に記述する極小モデルにはなっていないが，その微分が定義域空間と値域空間のモデルから直接計算出来るという利点をもつ。

本研究に着手する当初は，Haefligerモデルや B-S モデルの利用による写像空間の有理ホモトピー群や Gottlieb 群の研究が Smith，研究代表者により行われていた。また B-S モデルの位相空間の圏から微分代数の圏への関手的性質の解明がBuijs, Murilloにより進められていた。その研究の中に現れる評価写像のモデルは研究代表者により構成されていたものと一致しているという事実は特筆に値する。

２．研究の目的

本研究では有理ホモトピー論を駆使することで，今まで取り扱いが困難だった写像空間のトポロジー的考察を発展させ多様体のトポロジー的性質の解明に力点が置かれる。具体的には，Brown, Szczarbaによる写像空間の有理モデル(B-Sモデル)と評価写像モデルを用いて次の３つの問題について適切な解答を与えることが研究目的である。

(1)連結な等質空間M＝G/H上の自己ホモトピー同値写像のつくるモノイドの恒等射連結成分$aut_1(M)$を考える。このときGの$aut_1(M)$における有理可視化問題，すなわちGのMへの標準的作用が誘導するGからモノイド$aut_1(M)$への写像が有理ホモトピー群上でどのような場合に単射になるかという問題の考察および単射になる次元の決定。

(2)2m次元の多様体 M に対して，その２次元の有理係数コホモロジー上に元 a が存在し a の m 乗が非自明であるときMをc-シンプレクティック多様体と呼ぶ。この空間Mに対して得られる分類空間Baut_1(M)の特性類,Kedra-McDuff類のB-Sモデルによる表記問題。

(3)シンプレクティック多様体(M,w)をファイバーにもつファイブレーションにおけるシンプレクティック類[w]の全空間のコホモロジー類への拡張問題。

それぞれの問題は以下のような研究の動機づけのもとに提起されている。$aut_1(M)$が微分同相群を部分群に持っていることから(1)の単射性は非常に重要な帰結を持つ。実際，研究(2)により分類空間$Baut_1(M)$のKedra-McDuff類が明らかになり，その代数構造も記述可能となれば，微分同相群の分類空間のコホモロジー上に非自明な元(特性類)の存在を確認出来るからである。

(3)に関しては，この拡張問題が解決することで，Thurstonの結果にからシンプレクティック多様体を底空間，ファイバーにもつファイブレーションの全空間にシンプレクティック構造が定義出来ることになる。

３．研究の方法

幾何学的対象をde Rham-Sullivan対応を用いて微分代数的対象に変換し，有理ホモトピー論の道具を用いてその性質を解明する。さらに幾何学的実現関手等を用いて得られた微分代数上の情報を再び幾何学的なものに変換する。これが本プロジェクトでの一般的な研究手法である。有理ホモトピー論の威力を最大限に利用するためには，幾何から変換後現れる微分代数の何に注目すべきかを熟考することが重要である。そのためにホモトピー論をより幾何学的に取り扱い研究を進める研究者と議論を行って来た。シンポジウムや研究集に参加し，またセミナー講師や研究打ち合わせのため国内外から研究者を招聘することで，こうした議論の機会を得て来た。

写像空間をトポロジーの立場から研究する場合，写像空間を与える関手の随伴性により，評価写像を経由し直積空間の

議論に持ち込むことは常套手段と考えられる。したがって有理ホモトピー論を適用するためには，評価写像の具体的な有理モデルが必要になる。研究代表者が構成したそのモデルは B-S モデルから導き出されたものであり，計算の複雑さは避けられないが，完全に写像空間の B-S モデルによる考察に組み込まれている。

この相性の良さを最大限に利用することで研究を進めて来た。

上記研究の目的で述べられた３つの問題のうち(1),(2)を同時に考察した。まず一般のファイブレーションを支配するM-普遍ファイブレーションを理解するために，その全空間のコホモロジー環H^i(Maut_1(M)) (i= 1,2)の生成元に関する情報が必要になる。このために第一象限型の Eileberg-Moore スペクトル系列(EMSS)が有効利用出来ることがわかり，これと評価写像モデルの考察をうまく融合させて研究を進めた。実際,スペクトル系列の第２項を計算する同来関手は評価写像モデルによりある程度計算可能であることがわかった。 さらに EMSS の近似スペクトル系列の構成がこの研究の鍵となっている。

(1),(2)の結果を踏まえて研究期間の後半では(3)を考察した。一般に与えられたファイブレーションにおいて，その底空間が単連結である場合，ファイバーであるシンプレクティック多様体(M, w)が単連結ならば，Kedraの結果によりコホモロジー類[w]は拡張可能である。したがってここではファイバーが2k次元トーラス分解可能である場合，すなわちMの有理ホモトピー型が単連結空間と2k次元トーラスの直積である場合を考察し類[w]が拡張可能であるための必要十分条件をモノイドaut₁(M)の分類空間の言葉で記述することを目標とした。その研究方法は以下の通りである。

与えられたファイブレーションの分類写像とそれらの生成元との関係を明らかにするためにコホモロジーH^*(Maut(M))を上述のEMSSを用い低次元で求め，その生成元とM−普遍ファイブレーションから構成されるLeray-Serreスペクトル系列上の元と比較した。これにより類[w]が拡張可能であるための必要十分条件を分類空間の言葉で書くことが可能となった。すなわちコホモロジーH^i(Maut_(M))を仲介者として利用し拡張問題を考察するのである。

一般に(M, w)が2k次元トーラス分解可能であってもコホモロジーH^*(aut₁(M))の構造は複雑である。したがってシンプレクティック多様体の適切なSullivanモデルを選ぶことが上述のスペクトル系列の計算においては重要になる。そこでモノイドaut₁(M)のより洗練されたモデルを構築するために近年Lambrechts, Stanleyによりその存在が明らかになった多様体のPoincare双対代数モデルを利用した。

４．研究成果

研究開始から２年間の考察が実り，c-シンプレクティック多様体 M に対して,そこから得られる分類空間Baut₁(M)の特性類であるKedra-McDuff類にB-Sモデルによる解釈が与えられた。この解釈を用いて，Mのコホモロジー環が単生成である場合はBaut₁(M)の有理コホモロジーはKedra-McDuff類で生成される多項式環であるという定理を得た。

加えて，ファイバーが完全交叉代数である場合にファイブレーションのLeray-Serreスペクトル系列が第２項で潰れるというHalperin予想に関連した結果も得た。具体的には，この予想が肯定的に解決されるための必要十分条件をB-Sモデルの言葉で記述することで，コホモロジーが完全交叉代数である空間Mをファイバーにもつ普遍ファイブレーションの全空間のコホモロジーをBaut₁(M)のコホモロジー環上の代数として決定した。こうして問題(2)が解決出来たことになる。これらの結果は論文として出版された(雑誌論文③)。

上述研究過程で得たアイディア，すなわち等質空間へのLie群作用をモデルで表示する方法を確立したことにより，Mが等質空間G/Hである場合に，Lie群Gのaut₁(M)における有理可視化問題を詳細に考察することが可能になった。その結果，Gが可視化可能であるための必要十分条件が得られ，この認識原理を用いOniscikにより分類が完成しているランク１の等質空間に対して可視化次元をすべて決定した。こうして(1)の問題は解決した。これらの結果は論文としてまとめられた(雑誌論文②)。雑誌論文②のAppendixでは，この可視化問題の解決の成果として，Lie群 SO(2m)に同伴する旗多様体の微分同相群のコホモロジーに非自明な特性類を与えることができた。

問題(3)に関する研究の結果は以下のとおりである。Mが偶数次元トーラス分離可能であるとする。この場合に，ファイバーのシンプレクティック類が拡張可能であることと，与えられたファイブレーションの分類写像から得られる検知写像の自明性とは同値であるという結果を得た。 トーラス分離可能シンプレクティッ

ク多様体をファイバーに持ち，底空間 B がco-H空間であるファイブレーション全体の集合を考えるとき，シンプレクティック類が拡張可能であるものからなる部分集合Mext(B)には積の構造が入ることがわかった。これは研究当初予期していなかった結果であるが，論文作成中にレフェリーから，検知写像のさらなる応用を考察せよと示唆されたのが切っ掛けとなり，これらの結果に行き着いた。特に底空間が球面である場合にMext(S^2)はアーベル群になり，それを有理数体で拡大したベクトル空間の次元を完全に決定することが出来た。結果は論文としてまとめられた(雑誌論文①)。

上述の拡張可能定理と集合Mext(B)の構造に関する結果は,写像空間の有理モデルの汎用性を示すとともにシンプレクティック多様体のファイブレーションを利用したトポロジー的,大域的な性質の解明に今後貢献することが期待される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Katsuhiko Kuribayashi, On extensions of a symplectic class, Differential Geometry and its Applications, 29(2011), 801-815. (査読有)

② Katsuhiko Kuribayashi, Rational visibility of a Lie group in the monoid of self-homotopy equivalences of a homogeneous space, Homology, Homotopy and Applications, 13(2011), 349-379. (査読有)

③ Katsuhiko Kuribayashi, On the rational cohomology of the total space of the universal fibration with an elliptic fibre, Contemporary Math. vol. 519, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 165-179. (査読有)

〔招待講演〕（計　１　件）

① Katsuhiko Kuribayashi, Rational models for function spaces and applications, Homotopy Theory of Function Spaces and Related Topics, MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH, Germany, 6 April, 2009

〔その他〕
ホームページ等
http://marine.shinshu-u.ac.jp/~kuri/

６．研究組織

(1)研究代表者 栗林 勝彦
(KURIBAYASHI KATSUHIKO)
信州大学・理学部・教授
研究者番号：40249751