

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 3月28日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540071

研究課題名（和文） ケーラー磁場とグラフ

研究課題名（英文） Kaehler magnetic fields and graphs

研究代表者

足立 俊明（ADACHI TOSHIAKI）

名古屋工業大学 工学研究科 教授

研究者番号：60191855

研究成果の概要（和文）：

ケーラー多様体の部分多様体の性質を調べるために、概接触構造から誘導される自然な閉2形式を考え、その定数倍である佐々木磁場の下での荷電粒子の等速運動について考察した。佐々木磁場は一様な力が働く磁場ではないため、軌道が古典的なフレネ・セレーの公式に関して単純である2次の曲線になっているかという観点に着目した。複素空間形といわれる対称性の高いケーラー多様体内の測地球面をはじめとするA型実超曲面上にはこのような軌道が存在し、しかもこのような軌道の量により複素空間形内の部分多様体族の中でA型実超曲面は特徴付けられることがわかった。更に、閉じた2次の曲線になる軌道の長さが数直線上にどのように分布するかを明らかにした。

一方、ケーラー多様体の離散モデルの提案にも取り組み、辺が2色に彩色されたグラフがその候補であることを、グラフ上の閉じた道と磁場の下での閉軌道とを対応させ、両者の長さの分布状況に類似点があることを裏付け証拠として示した。

研究成果の概要（英文）：

In order to study properties of submanifolds in Kaehler manifolds, we consider natural closed 2-forms on submanifolds which are induced by almost contact metric structures. We study motions of electric charged particles of unit speed under actions of Sasakian magnetic fields, which are constant multiples of natural 2-forms, on submanifolds. Since strengths of Sasakian magnetic fields acting on charged particles are not uniform, we are interested in the problem whether there exist trajectories which are also curves of order 2. From the viewpoint of classical Frenet-Serre formula, we may say that curves of order 2 are simple. We study submanifolds in complex space forms, which are highly symmetric. We show that there exist such trajectories on real hypersurfaces of type A whose class includes geodesic spheres. We can characterize these real hypersurfaces by the amount of such trajectories. We also show how lengths of closed trajectories which are also curves of order 2 are distributed on the real line.

Besides, we give discrete models of Kaehler manifolds. We propose graphs whose edges are colored by 2 colors to be good models. We studied distribution of closed passes on these graphs and show a similarity between the distribution of lengths of closed passes on graphs and that of closed trajectories on Kaehler manifolds.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学

1. 研究開始当初の背景

リーマン幾何学において測地線の性質から多様体の構造を調べる手法は広く行われてきた。一方、複素多様体においては複素構造からむしろ代数幾何学との関連が濃く、曲線族を利用した考察は、等長はめ込みを通じた部分多様体の考察において少し行われる程度で、リーマン幾何学的手法はほとんど適用されていない。

2. 研究の目的

本研究は、ケーラー多様体や概接触多様体の構造に関連した磁場(つまり閉2形式)を考えて、その磁場の下での荷電粒子の等速運動である軌道の性質を調べること、また逆に軌道の性質から多様体やその上の幾何構造を考察することを目標とする研究の一環として成された。この研究では特に (1)ホロ球面をはじめとする複素双曲空間や複素射影空間内の等質ホップ実超曲面における佐々木磁場による軌道の性質の考察と外側の空間におけるケーラー磁場による軌道との関連を調べること (2) 複素双曲空間におけるケーラー磁場による軌道の性質を調べるための参考として、ケーラー多様体とケーラー磁場による軌道の離散化モデルを提唱すること また関連して (3) 複素双曲空間や複素射影空間内の螺旋族の分類 について調べることを目的とした。

3. 研究の方法

4項目に分けた目的に応じて以下の方法により研究を行った。

(1) 複素双曲空間や複素射影空間内の A 型実超曲面といわれるホロ球面や測地球面を含むクラスの超曲面族に対して ① 佐々木磁場の下での軌道がフレネ＝セレーの公式の観点から測地線に次いで単純な構造である円になる場合があるか ② 円になる軌道が閉曲線になるための条件を求め、その時の長

さはどうなるか という点を院生の包女史と部分多様体の基本的な等式を利用して計算し外的形状を考察した。

(2) 複素構造を補助辺を持つグラフとして離散化した。この離散化の正当性を保証する1つの根拠として、正則グラフにおける閉軌道の数の長さに関する漸近挙動と複素双曲空間におけるケーラー磁場の下での閉軌道の長さに関する漸近挙動とを比較して考察した。

(3) 複素射影空間における4次以下の螺旋族をホップ写像を通して複素ユークリッド空間における曲線に持ち上げて考察した。

4. 研究成果

(1) 複素双曲空間や複素射影空間内の A 型実超面上の佐々木磁場による軌道を考察して ① 測地線と同じく等質曲線、すなわち等長写像の1径数族による軌道になる ② A_1 型超曲面では、主曲率の最小値以下の磁力の下では円になる軌道は存在せず、それより大きい磁力の下では合同性を考慮するとただ1つの円軌道が存在する ③ A_2 型超曲面においては合同性を考慮すると高々3種の円軌道が存在する ④ ホップ超曲面の族の中で円軌道の量により $A_1 \cdot A_2$ 型超曲面を特徴付けることができることがわかった。更に A_1 型超面上の円軌道の様子を詳しく調べ、⑥ 磁力により定まるある量互いに素な2つの整数を使って表現できるときに限り閉じている ⑦ 長さは磁力と2つの整数を利用して表現できる ⑧ 磁力を変化させたときには閉円軌道の長さは非有界である ことを示すことができた。ケーラー磁場は実偶数次元の多様体所の構造であり、この結果は実奇数次元の多様体における考察として対比されるものであり、 A_1 型超曲面は接触構造を持つ多様体のモデル空間になっているため、今後佐々木磁場を考察する上で、例えば測地線の考察における比較定理などを与える基

礎となるはずである。

(2) 複素構造という実 2 次元的な構造をグラフという 1 次元の構造による離散化を考えるために、辺集合を 2 色に彩色して一方の辺を補助グラフと考えることにより主グラフ上の動きのステップ数 a と補助グラフ上の動きのステップ数 b との組み合わせで磁場の強さを表現することにした。 (a,b) という動きの閉道の長さを主グラフ上の動き a の和と考えて、閉道の個数の長さに関する漸近挙動をエントロピーとする。これをケーラー磁場による複素双曲空間上の閉軌道の個数の長さに関する漸近挙動としてのエントロピーと比較すると、磁力が b/a である場合に相当することがわかり、離散モデルとして対応が見つかることがわかった。

(3) 複素射影空間における等長写像の 1 径数族による軌道になっている 4 次以下の螺旋族を考える。測地曲率と複素振率により等長写像による変換で合同になるための条件を表示することができるが、この同値類集合の様子を調べることで、定曲率空間における螺旋族と異なり building の構造を持ってはいないことがわかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 22 件)

① 足立俊明・包 図雅

Behavior of circular trajectories on hypersurfaces of type (A_1) in a complex hyperbolic space, Kodai Mathematical Journal, 査読有, 34, 2011, 485—504

② 足立俊明・包 図雅

Trajectories for Sasakian magnetic fields on homogeneous real hypersurfaces of type (B) in a complex hyperbolic space, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 29, 2011, S28—S32

③ 足立俊明

Magnetic Jacobi fields for Kaehler magnetic fields, Recent Progress in Differential Geometry and its Related Fields, 査読有, 2011, 41--53

④ 足立俊明・包 図雅

Lengths of circular trajectories on geodesic spheres in a complex projective space, Kodai Mathematical Journal, 査読有, 34, 2011, 257—271

⑤ 足立俊明

Kaehler magnetic fields on Kaehler manifolds of negative curvature, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 29, 2011, S2—S8

⑥ 足立俊明・亀田真澄・前田定廣

Real hypersurfaces which are contact in a nonflat complex space form, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, 40, 2011, 207--219

⑦ 足立俊明

Moderate Killing helices of proper order four on a complex projective space, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, 32, 2010, 435--452

⑧ 足立俊明・亀田真澄・前田定廣

Geometric meaning of Sasakian space forms from the viewpoint of Submanifold Theory, Kodai Mathematical Journal, 査読有, 33, 2010, 383--397

⑨ 足立俊明・包 図雅

Circular trajectories on real hypersurfaces in a nonflat complex space form, Journal of Geometry, 査読有, 96, 2009, 41—55

⑩ 前田定廣・足立俊明

Sasakian curves on hypersurfaces of type (A) in a nonflat complex space form, Results in Mathematics, 査読有, 56, 2009, 489--499

⑪ 足立俊明

A discrete model for Kahler magnetic fields on a complex hyperbolic space, Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, 査読有, 2009, 1—9

⑫ 足立俊明

Foliation on the moduli space of helices on a real space form, International Mathematical Forum, 査読有, 4, 2009, 1699--1707

⑬ 前田定廣・足立俊明・KIM, Young Ho

A characterization of the homogeneous ruled real hypersurface in a complex hyperbolic space, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, 61, 2009, 315—325

⑭ 前田定廣・足立俊明

Extrinsic geodesics and hypersurfaces of type A in a complex projective space, Tohoku Journal of Mathematics, 査読有, 60, 2008, 597—605

⑮ 足立俊明

Curvature logarithmic derivatives of curves and isometric immersions, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 2008, 13--21

⑯ 足立俊明・杉山 儀

A characterization of isotropic immersions by extrinsic shapes of smooth curves, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 26, 2008, 307—312

⑰ 足立俊明

Geodesics on real hypersurfaces of type A2 in a complex space form, Monatshefte für Mathematik, 査読有, 153, 2008, 1—29

⑩ 足立俊明

Trajectories on geodesic spheres in a non-flat complex space form, Journal of Geometry, 査読有, 90, 2008, 1—29

[学会発表] (計15件)

① 前田定廣・足立俊明

非平坦複素空間内の測地超球面の特徴付け, 日本数学会 2012 年度年会, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学神楽坂キャンパス

② 足立俊明

Hadamard Kaehler 多様体上の軌道 ~ 軌道ハープの比較定理~, 研究集会「極小曲面と幾何構造」2012 年 3 月 7 日, 名城大学タワー

③ 足立俊明・包図雅

複素射影空間内の測地球面におけるの佐々木磁場による円軌道の長さ, 日本数学会 2011 年度年会, 2011 年 3 月 21 日, 早稲田大学

④ 足立俊明・包図雅

複素空間内の A 型実超曲面上の佐々木磁場による円軌道, 日本数学会 2010 年度秋期総合分科会, 2010 年 9 月 22 日, 名古屋大学

⑤ 足立俊明

A theorem of Cartan-Hadamard type for Kaehler magnetic fields, 2nd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields (ICDG2010), 2010 年 9 月 10 日, St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria

⑥ 足立俊明

On trajectory-spheres for Kaehler magnetic fields, Differential Geometry and its Applications (DGA2010), 2010 年 8 月 29 日, Masaryk University, Bruno, Czech Republic

⑦ 前田定廣・足立俊明・亀田真澄

部分多様体論から見た佐々木空間形の幾何学的意味, 日本数学会 2009 年度秋期総合分科会, 2009 年 9 月 24 日, 大阪大学豊中キャンパス

⑧ 前田定廣・足立俊明

複素射影空間内の A₂ 型超曲面の特徴付け, 日本数学会 2009 年度年会, 2009 年 3 月 26 日, 東京大学駒場キャンパス

⑨ 足立俊明

Extrinsic shapes of smooth curves through isometric immersions of Kaehler manifolds, International Symposium on Recent Advances in Mathematics and its Applications (ISRAMA 2008), 2008 年 12 月 19 日, Kolkata, India

⑩ 足立俊明

ケーラー磁場による軌道に対する 1 つの離散モデル, 研究集会「微分幾何学と複素構造」2008 年 11 月 6 日, 新潟大学自然科学研究科

⑪ 足立俊明

Prime cycles on regular Kaehler graphs, 1st International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields (ICDG2008), 2008 年 8 月 30 日, St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria

⑫ 足立俊明

Prime cycles on regular Kaehler graphs, 1st International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, 2008 年 8 月 30 日, St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Bulgaria

⑬ 足立俊明

A discrete analogue of Kaehler magnetic fields on a complex space form, The 8th International Workshop on Analysis, Differential Geometry, Mathematical Physics and Applications, 2008 年 8 月 25 日, Institute for Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Science, Sofia, Bulgaria

[図書] (計1件)

① 足立俊明, 橋本英哉, Milen J. Hristov, World Scientific, Recent Progress in Differential Geometry and its Related Fields, 2011, 200

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等
<http://venus.web.nitech.ac.jp/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

足立 俊明 (ADACHI TOSHI AKI)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：6 0 1 9 1 8 5 5

(2)研究分担者

山岸 正和 (YAMAGI SHI MASAKAZU)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：4 0 2 7 0 9 9 6

(3)連携研究者

前田 定廣 (MAEDA SADAHI RO)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号：4 0 1 8 1 5 8 1

江尻 典雄 (EJIRI NORIO)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：8 0 1 4 5 6 5 6