様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 27 日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008 ― 2010
課題番号：20540072
研究課題名（和文）種々の幾何構造をもつ低次元多様体の研究

研究課題名（英文）Topology of low dimensional manifolds with various geometric structures
研究代表者 上 正明（Ue Masaaki）
京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80134443

研究成果の概要（和文）：研究代表者の上 正明は３，４次元多様体，特に境界付き４次元多様体を念頭に研究を行った．これらの研究の有力手段である２大理論，Seiberg-Witten 理論と Heegaard Floer ホモロジー理論から派生する３次元多様体の２つの不変量，前者における Fukumoto-Furuta の不変量，後者における補正項不変量と呼ばれるものが球面多様体と呼ばれる３次元多様体の上では一致し，さらにエータ不変量と呼ばれる既知の不変量によって表されることを示した．またこのタイプの３次元多様体を境界とする４次元多様体の構造が Fukumoto-Furuta の不変量によってある制約をうけることを具体的に示した．

研究成果の概要（英文）：Masaaki Ue, the representative of this research has studied 3 and 4-manifolds, in particular 4-manifolds with boundary. We show that the two invariants for 3-manifolds, which are called Fukumoto-Furuta invariant and the correction term, coincide in case of spherical 3-manifolds. These invariants are derived from the two important theories for this area of research, Seiberg-Witten theory and Heegaard Floer homology theory. Moreover we show that these invariants are represented by the previously known eta invariants. We also give explicit constraints for the structures of 4-manifolds bounded by 3-manifolds of this type in terms of the Fukumoto-Furuta invariant.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分トポロジー，３次元多様体，４次元多様体，Seiberg-Witten 理論

１．研究開始当初の背景

3,4 次元多様体の研究に関して Seiberg-Witten 理論や Heegaard Floer ホモロジー理論が発展し,結び目，３次元多様体，４次元多様体の研究に多大な成果をもたらした．
この両者がもたらす４次元多様体の不変量，前者における Seiberg-Witten 不変量と後者における Ozsvath-Szabo の不変量は同値であると予想され，それらに関連する３次元多様体の Floer ホモロジーのレベルではそれを裏付ける結果が得られつつある．しかし
４次元多様体のエキゾチックな微分構造の

解明には依然前者が用いられ，後者の不変量を具体的に扱った例は少ない．また Seiberg-Witten 理論における有限近似理論，そこから派生する３次元多様体の不変量の理論は Heegaard Floer ホモロジーの側に完全に対応するものが未だ存在せず，２つの理論の関係の完全な解明，およびその３，４次元多様体への具体的適用に関してはなお解明すべき課題が多い．研究代表者は前者から派生した理論を３次元多様体を境界とする４次元多様体の構造解明に適用してきた．これをより発展させ後者の理論との関連をさぐることが課題であった．

２．研究の目的

ゲージ理論の低次元多様体研究への導入以降，Seiberg-Witten 理論，Heegaard Floer ホモロジー理論の登場により３次元多様体，境界のない４次元多様体の構造解明は飛躍的に進展した．これらの理論からもたらされる不変量は３，４次元多様体の構造の解明，特に４次元多様体の微分同相類の違いを明らかにする有力でしばしば知られる限り唯一の方法を提供する．しかし多様体が複雑になるほどその決定は困難となるため，多様体を３次元多様体で切り分けて境界付き多様体の和とみなし，それらの貼り合わせに関する不変量の公式を追求することが重要となっている．しかし境界をもつ４次元多様体の構造は境界の３次元多様体の特性がからむため複雑でその具体的な解明はまだ十分とはいいがたい．一方では上述の理論は，逆に３次元多様体の不変量でそれらの多様体を境界とする４次元多様体の情報を与えるようなものを理論的に提供している．
そこで上記の理論を適用することにより与えられた３次元多様体を境界とする４次元多様体の構造にいかなる制約があるか，具体的には交叉形式にどのような制約条件が課せられるか，これと関連して３次元多様体が結び目の手術で表されるための条件を上記の理論から派生する不変量で解明すること，またこれらの不変量と既知の不変量との相互関連を明らかにすることが研究の目的であった．このような境界付き４次元多様体の構造の研究をある程度具体例に則して行うことにより，境界のない４次元多様体に関して提出されている上にあげた２つの理論の関係に関する予想を境界付き多様体の場合に精密化する手がかりを見いだし，また４次元多様体におけるエキゾチックな微分構造（同相だが微分同相でない多様体の構造）のより組織的な理解をめざすのが次のステップである．

３．研究の方法

３次元多様体の不変量のうち，これを境界とする４次元多様体の情報と関連して定義されるものに Seiberg-Witten 理論から派生した Fukumoto-Furuta の不変量，Heegaard Floer ホモロジー理論から派生した Ozs-vath-Szabo の補正項不変量などがある．研究代表者は与えられた３次元多様体がザイフェルトファイバー空間（閉曲線をファイバーとする一種の特異ファイバー空間）である有理ホモロジー３球面（３次元球面と有理ホモロジーが同型な３次元多様体）において前者の不変量がホモロジー同境不変であることを示したが，これをより一般の多様体の場合に拡張することが課題であった．一方で後者の不変量もホモロジー同境不変であることが知られているが両者は一般には一致せずその相互関係をさぐることも大きな課題である．そこでこれらの不変量と既知の不変量，たとえばエータ不変量などとの関連を追及することでその解明をめざした．

この課題の追求のためには３次元多様体の具体的構造，背景にある理論の解析的側面，既知の不変量のもつ数論的性質などを複合的に探る必要があり，これを３次元多様体（藤井），大域的幾何学（加藤毅），力学系（宇敷），数論（加藤信一）の専門家である分担者の知見をあおぎながら遂行することをめざした．

４．研究成果

研究代表者の上は3,4次元多様体のトポロジー，特に与えられた３次元多様体を境界とする４次元多様体のトポロジーの研究を行った.特にSeiberg-Witten理論由来のFUkumoto Furuta の不変量と Heegaard Floer ホモロジー由来の Ozsvath-Szabo の補正項不変量が３次元球面多様体に対して一致することを見いだし論文にまとめた．またその過程でこの場合これらの不変量が既知のエータ不変量と一致することも明らかにした．これらのことを明らかにするために，まず Fukumoto-Furuta 不変量に関しては研究代表者らが以前に得ていた不変量に関わる数論的特徴付けを利用した．それを導くには３次元多様体を境界とする４次元軌道体（特異点をもつ多様体）のディラック作用素の指数に関する Fukumoto-Furuta の不等式の考察が重要であった．一方これをエータ不変量と結びつけるために Seiberg-Witten 方程式のなすモジュライ空間に関する解析的考察およびその次元公式を与える Atiyah-Patodi-Singer の指数定理を用いた考察が必要である．これを

Ozsvath-Szabo による補正項不変量の数論的性質と比較し，帰納的に不変量の一致を導くことができることを示した．

さらに研究代表者は特別な形の鉛管多様体と呼ばれる４次元多様体の境界となる３次元多様体の場合にも２つの不変量が一致することを見いだし結果をプレプリントにまとめた．こちらは鉛管多様体に関するより組み合わせ的考察と我々が以前得ていたこれらの多様体を境界とする３次元多様体の Fukumoto-Furuta 不変量の考察，特にこれが Neumann-Siebenmann 不変量と呼ばれる組み合わせ的不変量と一致するという事実と，Nemethi によって得られた同種の３次元多様体の補正項不変量に関する公式を比較考察することによって得られたものである．
これと独立に Stipsitz が有理特異点のリンクとなる３次元多様体の場合に同様の結果を別の方法で示した．研究代表者の結果はより直接的であり，他の不変量との関係を明らかにする副産物がある点に特徴がある．
この二つの不変量はともにホモロジー同境不変という共通の性質をもつが，一般には一致せず，その違いがどこから生まれるかの解明は今後の重要な課題である．またザイフェルトファイバー空間である有理ホモロジー３球面を境界とする４次元多様体の交叉形式に対する Fukumoto-Furuta 不変量（この場合は前述の組み合わせ的に定義される不変量と一致する）を用いた制約条件を求めた．補正項不変量を用いた Ozsvath-Szabo による別の制約条件が知られているが両者は同じではなく，ある場合には研究代表者の結果が潜在的により強い結果を与えている可能性もある．両者の真の関係の解明は今後の課題である．
またこれらの研究はホモロジー３球面に対して定義される Rochlin 不変量という２を法とした値の不変量が整数値の不変量にホモロジー同境不変性を保って持ち上がるか，という未解決問題（これはさらには５次元以上の位相多様体が単体分割をもつかというより大きな未解決問題に結びつく）にアプローチするための１つの有力な手段となりうる．
また３次元球面多様体の場合に上述の不変量が符号数作用素とディラック作用素のエータ不変量の組み合わせで表されることを明らかにしたことにより，符号数作用素のエータ不変量の既知の公式から逆にディラック作用素のエータ不変量が標準的計量に関して組み合わせ的に求まることを明らかにした．この不変量は一般には計量に依存して値が変わる解析的な量であって求めることは容易ではない．この結果をより一般化することができればこの不変量が組み合わせ的に求まる範囲が広がり，多くの応用が期待できるであろう．

研究分担者の藤井道彦は研究協力者の佐藤隆夫との共同研究で，アルティン群の元が測地的元になるための必要条件を与え，またピュアアルティン群の場合その元が測地的元になるための必要十分条件を与えた．さらに後者の場合測地的オートマティック構造を具体的に構成し，その増大函数の有理関数表示を与えることに成功した．

研究分担者の加藤毅は４次元多様体の中の Casson ハンドル（２ハンドルと同相だが一般には微分同相でない）のエンドに関するゲージ理論的考察を行いそれらの多様体のエキゾチック微分構造を研究した．またある種の力学系の解析的観点からの研究を行った．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

1. Tsuyoshi Kato: Geometric representation of interacting maps, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 783738, 2010, 48 pages, 査読有り

２．Tsuyoshi Kato: Pattern formation from projectively dynamics in tropical geometry, Proceedings of the 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry, Advanced studies in pure and applied math. Vol. 57, 2010, pp.243-262, 査読有り

３．Masaaki Ue:The Fukumoto-Furuta and the Ozsvath-Szabo invariants for spherical 3-manifolds, Banach Center Publications, Vol. 85, 2009, pp. 121―139, 査読有り

４． Tsuyoshi Kato ：Deformations of real rational dynamics in tropical geometry, Geom. Funct. Anal. Vol.19, 2009, pp. 883-901, 査読有り

5. Tsuyoshi Kato ：Growth of Casson handles and transversality for ASD moduli spaces, Geometry and Topology, Vol. 12, 2008, pp. 1265-1311, 査読有り

〔学会発表〕（計９件）

１　藤井　道彦, Growth function of Artin groups II, トポロジーの現在と未来, 2010年12月22日, 四季の湯強羅青雲荘.

２　加藤　毅,　Growth of Casson handles and smooth structure on 4-manifolds, 2010年9月17日 Colloquium at University of Southern California, USA.

３　加藤　毅,　Growth of Casson handles and smooth structure on 4-manifolds, 2010 年６月, Pacific Rim Conference, Stanford University, USA.

４　加藤　毅,　Growth of Casson handles and smooth structure on 4-manifolds, 2010 年 3 月 26 日, Colloquium at Aarhus University, Denmark.

５　加藤　毅,　A rough equivalence on partial differential equations, Geometry and Analysis, 2009年12月21日, International conference at Paris 7.

６　藤井　道彦, Growth functions of Artin groups, Seminar at Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, 2009年11月26日, Lausanne.

７　藤井 道彦, Growth functions of discrete groups, 微分･代数トポロジーの現在と未来, 2009年11月11日,かんぽの宿　徳島.

８　加藤　毅,　An index theory over Casson handles and complexity of smooth structure on K3 surface, 2009年7月8日, Colloquium at Fudan University, Shanghai, China.

９　加藤　毅,　Growth of Casson handles and Yang Mills gauge theory, 2008年12月22日, The 4-th Geometry conference for the Friendship of China and Japan, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China.

６．研究組織

(1)研究代表者
上　正明 (Ue Masaaki)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80134443

(2)研究分担者
藤井　道彦 (Fujii Michihiko)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60254231
加藤　毅　(Kato Tsuyoshi)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20273427
加藤　信一　(Kato Shinichi)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90114438
宇敷　重廣　(Ushiki Shigehiro)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授
研究者番号：10093197

(3)連携研究者