

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 - 2010

課題番号：20540074

研究課題名（和文） 離散群と双曲構造の変形空間

研究課題名（英文） Deformation spaces of discrete groups and hyperbolic structures

研究代表者

藤井 道彦 (FUJII MICHHIKO)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60354231

研究成果の概要（和文）：研究代表者・藤井は、アルティン群というブレイド群を一般化した離散群に対して、いくつかの研究成果を得た。まず、アルティン群に自然に含まれているアルティン・モノイドについては、その測地的オートマティック構造（群やモノイドのケーリー・グラフの様子を把握できるもの）の構築を具体的に行い、アルティン・モノイドの増大関数の有理関数表示を得た。また、藤井は、アルティン群について、「その元をもっとも短い代表元で表すことができるか」という問題に取り組み、元をもっとも短い代表元であるための必要条件を得ることに成功した。

研究成果の概要（英文）：The head investigator Fujii obtained several results that concerns Artin groups. First, for each Artin monoid, Fujii concretely constructed its geodesic automatic structure and obtained a rational function expression of its growth function. Next, Fujii considers representatives of each elements of Artin groups in terms of its standard generator system and gave a necessary condition such that representatives are shortest with respect to the generator system.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学、トポロジー、双曲幾何、離散群

## 1. 研究開始当初の背景

多様体  $M$  に対して、その基本群からリー群  $PSL(2, \mathbb{C})$  への表現のなす空間は Thurston を始めとして、様々な研究者によっていろいろな角度から研究されていた。また、この設定を一般化して、離散群  $\Gamma$  に対して、その幾何を適切に反映させるリー群  $G$  を選んで、 $\Gamma$  から  $G$  への表現のなす空間の研究も盛ん

であった。

- (1) 多様体  $M$  が双曲錐構造を持つとき、その双曲錐構造の変形空間を考える。この場合、特に局所変形に関しては Hodgson-Kerckhoff によって、解析的手法を用いてかなり詳しく解析されていた。多様体がコンパクトな場合は従来からの Hodge 理論が適

応できるが、双曲錐構造の場合は非コンパクトになるので、双曲錐多様体のエンドでコホモロジーの解析が必要となる。関数解析の手法を用いて、Hodgson-Kerckhoff がその解析を行っていた。また、小島定吉氏によって、錐角が180度以下の場合に大域的な情報（双曲錐構造の剛性など）が得られていた。研究代表者・藤井は、Hodgson-Kerckhoff による解析をさらに展開させて、局所変形の解析に必要な調和ベクトル場の具体的表示を得ていた。この表示を基に、より詳細に局所変形を解析することによって、小島の条件（180度以下）を緩めることができるかどうかを研究することが重要だと思われていた。

- (2) 3次元球面内の双曲結び目の変形空間に関しては、それを代数多様体として捉えることによって、数論とトポロジーの間の類似物を発見しようとする試みが森下昌紀氏などによって行われていた。藤井は、8の字結び目の場合に、変形空間が楕円曲線になることに注目して、変形空間上の有理点と双曲構造が退化して他の幾何構造になる点との対応を発見していた。一般の双曲結び目の場合には種数が2以上になるが、その場合でも変形空間の有理点と幾何構造との対応があるかどうかを研究する必要性があった。
- (3) 双曲群に限らない、より一般の離散群の変形空間に関しては、齋藤恭司氏によって、有限部分グラフからなるホップ代数を用いて、その変形空間上の保形関数に構成の試みが行われていた。まずは保形関数のひな形の増大関数の情報を集める必要性があった。そもそも具体的に離散群の増大関数の計算自体もあまり行われていない状況であった。

## 2. 研究の目的

多様体  $M$  に対して、 $M$  上の双曲構造の変形空間  $D$  を次の3つの異なる角度から研究することを目的とした。

- (1) トポロジー的側面から  $D$  の構造を明らかにする。
- (2) 数論的側面から  $D$  の構造を明らかにする。
- (3) 幾何学的群論の側面から  $D$  の構造を

明らかにする。

上記(3)については双曲群の変形のみならず、幾何学的に重要な離散群の変形まで設定を拡張して、変形空間の構造を明らかにすることを目的とした。

## 3. 研究の方法

- (1) 双曲構造の変形理論の中では特殊であるが重要な双曲錐多様体の変形を微分方程式論や代数解析学の手法を用いて、双曲構造の変形空間  $D$  の構造の解明を行った。具体的には、双曲錐構造の局所変形の解析に必要な調和ベクトル場の具体的表示を用いて、大域的な変形のための障害に関する問題に取り組んだ。
- (2) 双曲幾何やコホモロジーの手法を用いて、双曲構造の変形空間  $D$  の構造の解明に取り組んだ。
- (3) 双曲結び目の場合に限定して、その上の双曲構造の変形空間  $D$  を代数多様体としてみて、数論とトポロジーの間に成り立つ類似に着目して、 $D$  の構造の解明を行った。一般に変形空間  $D$  は種数2以上となるので、そのヤコビ多様体の構成を行った。
- (4) 離散群のモジュラー関数の雛形である増大関数に着目して、離散群の変形空間の構造の解明を行った。まずは、幾何学的に重要な離散群の増大関数の計算を具体的にを行った。
- (5) 特にアルティン群に関する場合に、その測地的オートマティック構造の構成に取り組み、構成に必要なコンピューターによるプログラムを開発した。さらに増大関数の有理関数表示における分母の多項式の組み合わせ論的観点からの解析を行った。

## 4. 研究成果

研究代表者・藤井は、主として上記目的の項目(3)に関して研究成果を得た。特にアルティン群というブレイド群を一般化した離散群に関して下記のように、いくつかの研究成果を得た。

- (1) 研究代表者・藤井は、連携研究者・齋藤および淵脇氏と共同で、アルティン群に自然に包含されているアルティン・モノイドに対して、測地的オートマティック構造を具体的に構成することに成功した。特にコンピューターを用いて、そのようなオートマトンを構成できるコンピューター

- 一・プログラムを開発した。さらに、具体的に測地的オートマトンを構成することによって、アルティン・モノイドの増大関数の有理関数表示を得ることに成功した。
- (2) 研究代表者・藤井は連携研究者・斎藤および淵脇氏と共同で、アルティン群に対しても増大関数の各係数を計算できるプログラムを開発し、実際にいくつかの係数の計算に成功した。今後の展望としては、プログラムの開発をさらに進めて、より短時間で計算が行えるようにしていきたい。
- (3) 研究代表者・藤井は佐藤隆夫氏と共同で、Mairesse-Matheus が開発した二面体群のケースをさらに拡張することに成功した。具体的に述べると、アルティン群の中でもっとも単純なケースとして二面体群があるが、その場合に Mairesse-Matheus は、測地的代表元であるための必要かつ十分な条件を与え、測地的オートマティック構造を構成し、増大関数の有理関数表示を得た。そこで、藤井と佐藤は一般のアルティン群の場合に Mairesse-Matheus の与えた必要条件が自然に拡張できることを証明した。証明には fundamental elements の基本的性質を用いた。今後は、アルティン群のタイプごとに、測地的元であるための十分条件を記述できるかどうか挑戦することが意義深いと思う。まずは、アルティン群の中でも低次元幾何学に応用範囲の大きいブレイド群の場合に、その十分条件を求めていくことが望まれる。その十分条件を基にして、測地的オートマティック構造を構築して、それを記述するコンピューター・プログラムを開発し、増大関数の有理関数表示を求めることができると、幾何学的群論の分野において、インパクトは大きいと思われる。
- (4) 研究代表者・藤井は佐藤隆夫氏と共同で、ピュア・アルティン群 (ピュア・ブレイド群の一般化) に関して、その測地的代表元に関して、基本的性質をいくつか求めることに成功した。
- ①ピュア・アルティン群に対して、fundamental blocks という概念を導入した。これは、アルティン群の場合の square-free elements に対応するものである。
- ②二面体群に対応するピュア・アルティン群の場合には、その測地的

代表元であるための必要十分条件の記述を与えることに成功した。

③二面体群の場合のピュア・アルティン群の場合のモノイドについては、具体的に測地的オートマティック構造の構成を行って、その増大関数の有理関数表示を得ることに成功した。

④今後の展望としては、二面体群の場合のピュア・アルティン群の測地的オートマティック構造の具体的な構成を行うことを目指したい。そして、その増大関数の有理関数表示を求めていきたいところである。さらに二面体群の場合のみならず、一般の場合のピュア・アルティン群の代表元の測地的であるための十分条件を求めていきたい。また、ピュア・アルティン群を一般化して、2次元複素空間内の複素直線の配置空間まで拡張した形で測地的オートマティック構造や増大関数の研究を進めるべきだと思う。特に fundamental blocks を用いて、ワード問題の解決などを研究していくことは意義深いと思う。

- (5) 連携研究者・斎藤は、有限生成な離散群に対して、その有限部分グラフからなるホップ代数の構成および、その中の無限級数の表示を得た。今後の展開として、ここでの無限級数の有理関数表示の分母の多項式の組み合わせ論的あるいは表現論的意味づけを行っていくことが望まれる。また、藤井の行っている離散群の増大関数の一般化も斎藤の枠組みの中で展開していきたい。
- (6) 連携研究者・斎藤は、アルティン群のモノイドの増大関数の有理関数表示をした時の分母の多項式の零点集合に関する初期的研究成果を得た。今後は、零点集合の間のガロア群による作用に関しての考察も望まれる。また、アルティン群の一般化に対して、その増大関数の考察を行っていきたい。
- (7) 研究分担者・上は、3次元球面多様体場合に、Seiberg-Witten 理論から由来する Fukumoto-Furuta 不変量と Heegard-Floer ホモロジーに由来する Ozsvath-Szabo 不変量が一致することを示した。また、3次元球面多様体を境界とする4次元多様体の交叉形式に関する制約などへの応用も得た。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 6件)

- ① K. Saito, Limits elements in the configuration algebra for a cancellative monoid, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 46 (2010), 37-113. (査読有)
- ② M. Ue, The Fukumoto-Furuta and the Ozsvath-Szabo invariants for spherical 3-manifolds, Banach Center Publications, vol.85, Algebraic Topology Old and New, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, 121-139, 2009. (査読有)
- ③ N. Kawazumi, Canonical 2-forms on the moduli space of Riemann surfaces, Handbook of Teichmüller theory, edited by A. Papadopoulos, Vol. II, EMS Publishing House, Zurich, 2009, 217-237. (査読有)
- ④ K. Saito, Growth functions for Artin monoids, Proc. Japan Acad. Ser. A 85 (2009), 84-88. (査読有)
- ⑤ N. Kawazumi, Twisted Morita-Mumford classes on braid groups, Geometry and Topology Monographs 13 (2008), 293-306. (査読有)
- ⑥ K. Saito, Growth functions associated with Artin monoids of finite type, Proc. Japan Acad. Ser. A 84 (2008), 179-183. (査読有)

〔学会発表〕(計 5件)

- ① 藤井 道彦, Growth functions of pure Artin groups, Ober Seminar, 2011年3月14日、Fribourg. Switerland
- ② 藤井 道彦, Growth functions of Artin groups II, トポロジーの現在と未来, 2010年12月22日、四季の湯強羅青雲荘.
- ③ 藤井 道彦, Growth functions of Artin groups, Ober Seminar, 2009年12月2日、Fribourg. Switerland
- ④ 藤井 道彦, Growth functions of Artin groups, Seminar at Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, 2009年11月26日、Lausanne. Switerland
- ⑤ 藤井 道彦, Growth functions of discrete groups, 微分・代数トポロジーの現在と未来, 2009年11月11日、かんぼの宿 徳島.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

藤井 道彦 (FUJII MICHIIHIKO)  
京都大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：60254231

### (2) 研究分担者

上 正明 (UE MASAOKI)

京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：80134443

### (3) 連携研究者

河澄 響矢 (KAWAZUMI NARIYA)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：30214646  
森下 昌紀 (MORISHITA MASANORI)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：40242515  
斎藤 恭司 (SAITO KYOJI)  
東京大学・数物連携宇宙研究機構・主任研究員  
研究者番号：20012445