

機関番号：14602

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540076

研究課題名 (和文) 曲面の基本群の表現空間への写像類群の作用と複素力学系

研究課題名 (英文) The mapping class group action on the space of representations of surface groups and complex dynamics

研究代表者 山下 靖 (YAMASHITA YASUSHI)

奈良女子大学・理学部・教授

研究者番号：70239987

研究成果の概要 (和文)：2 元生成自由群の指標多様体のエンド不変量に関する予想について、S. P. タン氏および作間誠氏と予想の反例を構成した。また、これの対角部分集合におけるプリーツ曲線の類似物の存在を C. シリーズ氏と上記 S. P. タン氏とともに見出した。直角アルチン群の自己同型群および内部自己同型群の語の問題の計算の複雑さについて、Y. リエック氏と、計算の複雑さが多項式で評価可能であることを示した。

研究成果の概要 (英文)：I was succeeded in constructing a counter example to the conjecture on the end invariant of the character variety of the free group of rank two. This was a joint work with Prof. S. P. Tan and Prof. M. Sakuma. I have found a set of rays similar to the pleating rays in the diagonal slice of the character variety with Prof. C. Series and Prof. S. P. Tan. With Prof. Y. Rieck, I showed that the complexity of the word problem for the automorphism groups of right-angled Artin groups is bounded from above by a polynomial.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：双曲幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：双曲幾何、クライン群、複素力学系

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 低次元双曲多様体の双曲構造の変形の空間の座標については、2次元(曲面)の場合はタイヒミュラー空間論においてよく知られたものがあるが、3次元の場合はモストフの剛性定理により体積有限なものについては変形が不可能なので、そのままでは同じ問題を考えることはできない。しかし、体積が無限大の場合には通常は変形を行うことが可能で、中でも上記1点穴あきトーラスの

擬フックス空間  $QF$  について、ヨルゲンセンがこの変形の基本多面体を用いた幾何的で具体的な記述を与えた。指標多様体  $X$  中の「型を保つ」点の集合(以下  $X_{tp}$ )の点が適当な条件を満たすとヨルゲンセンの方法で擬フックス群が構成される。 $X_{tp}$  は複素3次元空間内においてマルコフ方程式と呼ばれる方程式の解空間として記述され、写像類群  $M$  は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  と同型であり、作用は上記の複素3次元空間上で高々2次の多項式によって与えられる自己同型によって生成される。

(2) 関連する研究として、(若干パラメータを加えた) マルコフ方程式の解空間への  $PSL(2, Z)$  による上と全く同じ作用は非常に様々な角度から研究され、注目を集めていることを述べておく。例えば、この作用は VI 型のパンルベ方程式の(非線型)モノドロミーの記述に用いられ、岩崎克則氏、上原崇人氏、稲場道明氏、齋藤政彦氏らによる一連の研究がある。群作用による複素力学系の立場からも、Bedford, Diller, Dinh, Dujardin, Lyubich, Sibony, Smillie, Cantat らによる活発な研究がある。また、「離散シュレディンガー作用素」として、Bellissard, Roberts, Casdagli, Mackey によって研究されている。最後に擬フックス群・クライン群からの研究として、Goldman, Benedetto, Brown, Stantchev, Souto, Storm, Tan, Wong, Zhang らによる研究があり、本研究はここに位置づけられる。

(3) 3次元双曲幾何学における長年の懸案であった、サーストーンによるエンディンググラミネーション予想やベアスによる密度予想がここ数年で肯定的に解決され、この分野における研究は近年さらに活発になってきている。本研究代表者は、広島大学の作間誠氏、須川敏幸氏、大阪市立大学の小森洋平氏、秋吉宏尚氏、大阪大学の和田昌昭氏らと上記ヨルゲンセン理論の精密化の研究を近年行ってきた。

また、与えられた指標多様体の点が入るかどうかを計算によって調べる方法を開発してきており、本研究課題に直接つながる研究を行ってきた。

## 2. 研究の目的

(1) 曲面  $\Sigma$  の基本群  $\pi$  のリー群  $G$  への表現全体を  $G$  の共役による作用で割って得られる空間は、自然に写像類群  $M$  による作用を許容し、この空間と作用を幾何的および力学系的に理解することが最も基本的な研究目的である。

(2)  $G$  がコンパクトな場合には作用がエルゴード的になり多くの興味深い研究があるが、本研究課題においては特に  $G$  として  $SL(2, C)$  のみを考える。そして表現全体を共役による作用でそのまま割る代わりに、(共役による同値よりも少しだけ同値関係を増やした)幾何学的不変式論の意味で割って得られる空間  $X$  を考える。 $X$  は指標多様体と呼ばれ、やはり自然に写像類群が作用し、さらに複素代数多様体の構造を持つことが知られている。そこで  $X$  上の写像類群の作用を(高次元)複素力学系としてとらえ、これを調べることにより、曲面に付随する幾何構造、写像類群、複素力学系に関する理解を深めるのが、目的である。

(3) 本研究課題においては、曲面として1つ穴あきトーラス  $T$  の場合のみに限定する。このとき、指標多様体  $X$  の点について、写像類群  $M$  の作用が固有不連続になるための必要十分条件が、Bowditch, Tan-Wong-Zhang によって示されている。作用が固有不連続になる点をすべて集めた集合は開集合で以下 PD と書くことにする。特に PD の部分集合で(ここではその定義を述べる余裕がないが)表現が「型を保つ」ものからなる集合 BQ は、1点穴あきトーラスの擬フックス空間 QF を含むことが分かっている。本研究課題では、これら2つの集合の間について調べることにする。

(4) BQ という(ある意味で高次元複素)力学系的な観点から特徴づけられる対象と、QF というクライン群(または3次元双曲幾何)に現れる対象との比較を行う。複素1次元力学系とクライン群についてはある種の対応関係に関する考察がこれまでもされてきているが、今回のような高次元の場合にはこれらをうまく結びつけることを目的とする。特に、ヨルゲンセン理論との関係をよりよく理解することを目的とする。

## 3. 研究の方法

(1) Bowditch の予想を計算機を用いて実験的に確認するためのソフトウェアの作成をすでに Tan 氏と共に作成し始めていたので、最初の段階では、このソフトウェアを完成させ、予想についての実験を組織的に行う。ここで、作成するソフトウェアは単に与えられた入力が入力が予想を満たすかどうかのみを答えるのではなく、研究の次の段階に生かせるように、途中の状況などについても詳しく調べられる機能を追加しておく。特にパラメータを少しずつ変化させたときの出力の様子をインタラクティブに調べることができものを作成することにより、これまで観察されてきていない現象などがないかなどについて調査を行うとともに、対象とする2者のフラクタル的な図形の様子を観察なども並行して行う。

(2) 対象である指標多様体は複素2次元のものであるが、その中でよく研究されている複素1次元の部分集合(具体的には Maskit slice や、若干設定が異なるが Riley slice と呼ばれるものなど。)について、問題の解決を目指すのが次の段階である。上記部分集合においては、写像類群の作用、BQ 条件、擬フックス空間に入るかどうかの判定の3つどれもが一般の指標多様体の点の場合より十分簡単であるため、解決には特別なアイデアが必要というより、上の(1)で行った実験結果を見ながら計算を行っていく。

(3) 最後にこれまでの結果をもとにして ch

指標多様体の一般の点についても問題の解決に取り組む。このために必要となる議論であるが、(2)の計算をさらに一般化していくことを検討する。また、擬フックス空間において「角度パラメータ」とよばれるパラメータを導入する際に用いられた、「幾何学的接続」という議論を使用する。

#### 4. 研究成果

(1) 2元生成自由群の指標多様体のエンド不変量に関する予想について、シンガポール大学のS. P. タン氏および広島大学の作間誠氏と議論を行い、予想の反例を構成することに成功した。この予想はもともとタン氏によって提案されたものであるが、表現空間の中の特別な部分集合上の写像類群への作用を詳しく見ることにより、予想の反例を具体的に構成することができた。また、関連して新たな予想を立てるための議論も行った。

(2) 2元生成自由群の指標多様体の中の特別な部分集合におけるプリーツ曲線の類似物に関して、ウォーリック大学のC. シリーズ氏と上記タン氏と議論を行った。

(3) Right angled Artin group の自己同型群および内部自己同型群の語の問題の計算の複雑さについて、Arkansas 大学の Yoav Rieck 氏と研究を行い、計算の複雑さが多項式で評価可能であることを見出した。特に計算の具体的なアルゴリズムの記述を行い、それが容易に実現可能であることを示すことができた。また、情報圧縮に関する最近の研究成果に基づき、多項式の具体的な次数に関しても詳しい評価を行い、アルゴリズムが十分効率的なものであることを示した。

(4) 原始安定と呼ばれる力学系的な性質を指標が持つかどうかを判定するための部分的なアルゴリズムの構築を行った。さらにそれを計算機上へ実装し、予備的な計算機実験を行ない、結果を研究会で報告した。

(5) 3次元多様体の複雑さを図る指標には様々なものが提案されているが、分岐被覆と双曲体積を組み合わせた link volume という概念を米国 Y. リエック氏と導入し、基本的な性質に関する研究を行った。任意の3次元多様体は球面内の結び目で分岐する球面の分岐被覆として表示することが可能である。結び目として特に双曲結び目を常に選ぶことが可能で、その場合は結び目の複雑さとして双曲体積を考え、それと被覆の次数の積がこの表示の複雑さと考えた。表示の与え方をすべて考えその下限として link volume を定義した。基本的な性質と共に研究会で報告を行った。

(6) グラフの平面性について、上記リエック氏と研究を行った。グラフを平面に埋め込むことができないときに、その被覆を考える

と平面に埋め込むことができる場合があり、関連してグラフの模倣という概念が定義されていた。この被覆と模倣は本質的には同じ概念であろうという予想に対して、判例を具体的なグラフにおいて構成することに成功した。この成果は論文にまとめて発表を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① Y. Rieck, Y. Yamashita, "Finite planar emulators for  $K4, 5-4K2$  and  $K1, 2, 2, 2$  and Fellows' Conjecture" European Journal of Combinatorics, 31 (2010) 903-907. 査読有

② Y. Rieck, Y. Yamashita, "The link volume", 研究集会「結び目の数学 III」報告集, (2010) 185-191. 査読無

③ Y. Rieck, Y. Yamashita, "The word problems for the automorphism and outer automorphism groups of right angled Artin groups are solvable in polynomial time", Proceedings of Intelligence of low dimensional topology 2008 and the extended KOOK Seminar (2008) 111-120. 査読無

④ Y. Yamashita, "OHT - A software for the dynamics of the modular group action on the character variety", 複素力学系とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録 1586 (2008) 18-25. 査読無

[学会発表] (計12件)

① Y. Yamashita, 2011.3.8, "A computer experiment on primitive stable representations", National University of Singapore.

② Y. Rieck, Y. Yamashita, 2010.12.22, "The link volume of 3-manifolds", 結び目の数学 III, 日本大学

③ Y. Yamashita, 2010.9.15, "A computer experiment on primitive stable representations", Hyperbolic Geometry and related topics, Korea Institute for Advanced Study, Korea

④ Y. Yamashita, 2010.9.8, "A computer experiment on primitive stable representations", トポロジーとコンピュータ, 東京工業大学

⑤ Y. Yamashita, 2010.6.30-7.9, "Computer experiments on once punctured torus groups", Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties, National University of Singapore, Singapore

⑥ Y. Yamashita, 2009.10.17, "Data compression and the outer automorphism of rightangled Artin groups", Workshop on Category Theory, Computer Science and Topology, 信州大学

⑦ Y. Rieck, Y. Yamashita, 2009.9.25, "Finite planar emulators and Fellows' conjecture", 日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学

⑧ Y. Rieck, Y. Yamashita, 2009.8.31, "On Fellows' conjecture", トポロジーとコンピュータ, 東京工業大学

⑨ Y. Rieck, Y. Yamashita, 2009.1.12, "The word problem for the outer automorphism group of right-angled Artin groups", 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 大阪大学

⑩ 山下靖, 2008.12.22, 2元生成メビウス変換群に関する Jorgensen と Bowditch の理論について, 第四回明治大学生田幾何セミナー, 明治大学

⑪ Y. Yamashita, 2008.11.6, "Computer experiments on the growth function of twobridge link groups", Geometry & Topology seminar, University of Warwick, UK

⑫ Y. Rieck, Y. Yamashita, 2008.10.7, "The word problem for the automorphism and outer automorphism groups of a right-angled Artin group is solvable in polynomial time", 研究集会「Intelligence of Low Dimensional Topology」兼「拡大 K00K セミナー」, 大阪市立大学

[その他]

ホームページ

<http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamashita/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山下 靖 (YAMASHITA YASUSHI)  
奈良女子大学・理学部・教授  
研究者番号 : 70239987