

平成23年4月1日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540077

研究課題名(和文) 可積分測地流に関する諸問題の展開

研究課題名(英文) Development of various problems related to integrable geodesic flows

研究代表者

清原 一吉 (KIYOHARA KAZUYOSHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：80153245

研究成果の概要(和文)：可積分測地流に関わるいくつかの問題に重要な進展を与えた。具体的には可積分測地流を持つある種のリーマン多様体のクラスについて、その最小跡や共役跡を決定したこと、エルミート多様体で可積分測地流を持つもののあるクラスについて、その局所構造を決定したこと、可積分測地流を持つ曲面のあるクラスについて、ラプラシアン固有値に対する特異半古典近似値を求めたことなどである。

研究成果の概要(英文)：We obtained several important results for problems related to integrable geodesic flows. In particular, we determined cut loci and conjugate loci of points for certain class of riemannian manifolds with integrable geodesic flows. Also, we determined the local structure for certain class of hermitian manifolds with integrable geodesic flows. Moreover, we formulated “singular” semiclassical approximation for the laplacian on a certain class of surfaces with integrable geodesic flows.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：可積分測地流、楕円体、最小跡、共役跡、半古典近似、リウヴィル多様体

## 1. 研究開始当初の背景

可積分測地流、あるいはもっと一般に可積分なハミルトン力学系の歴史は古い。解析力学が成立した後、「保存量と還元」というメカニズムが認識されてきたが、その最も極端

な場合が可積分系である。この場合問題は一次元に還元され、基本的には明示的に可解である。可積分測地流に関して言えば保存量即ち第一積分の最も簡単な例はキリングベクトル場であり、回転面の場合これによって

測地線の方程式は明示的に解ける。他方、楕円体の測地流が可積分であることが古くから知られており、これは一般の場合に0でないキリングベクトル場を持たない。後者の場合、既にLiouvilleにおいてその一般化の研究がなされていて、最近の私によるLiouville多様体とその複素化の研究につながっている

## 2. 研究の目的

この研究の目的は、「可積分測地流」に関わるいくつかの主要な問題に対して、明確な進展をもたらすことであった。それらは大きく3つの問題に分けられる。

- (1) Liouville多様体の一般点の共役跡とカットローカスの問題。高次元の場合、ノンコンパクトな場合の特定。
- (2) Liouville多様体において、ラプラス作用素の固有値分布の構造を明らかにする。特に特異半古典近似の理論を作ること。
- (3) Liouville多様体とKaehler-Liouville多様体の理論をHermite-Liouville多様体の理論へ発展させる。

## 3. 研究の方法

前項の場合分けに応じて、次のようであった。

- (1) 楕円体を含む、ある種のLiouville多様体の一般点の共役跡の特異点集合の様子および全体の形状について調べる。さらにノンコンパクトなLiouville曲面のカットローカスと共役跡について調べる。
- (2) Liouville曲面について、ラプラス作用素の固有値分布の構造に対する(特異)半古典近似の方法についての過去の研究(清原、リュヴィル曲面における半古典近似、数理研講究録 No. 1119 (1999), 35-47)を整理し、完全な証明を付けた論文として公表する。これを高次元化のためのステップとする。
- (3) Hermite-Liouville多様体の理論を研究する。まず複素射影空間上に作られる大域例およびKaehler-Liouville多様体の大域的構造理論を参考にしつつ、コンパクトな場合の大域的構造を調べ、その結果を局所構造の分類結果と比較検討する。これらの問題に対する分担者・連携研究者の役割は次の通りであった。

代表者は上記の問題をすべて同時に研究する。分担者の伊藤氏は(1)の問題を最小跡(カットローカス)の専門家の立場から研

究する。彼の手法はリーマン幾何とともに組み合わせ的な幾何に基礎をおいたものであり、代表者の、どちらかという解析的な手法とは異なる立場から、この問題に取り組む。また連携研究者の五十嵐氏はこれまで代表者とHermite-Liouville多様体の研究に共同して取り組んで来ており、その続きとして3の問題を研究する。連携研究者の勝田氏はスペクトル幾何の専門家の立場から2の問題について随時代表者と話し、代表者に助言を与える。

## 4. 研究成果

前々項の場合分けに応じて記す。

- (1) 「楕円体を含む、ある種のLiouville多様体の一般点の共役跡の特異点集合の様子および全体の形状について調べる。さらにノンコンパクトなLiouville曲面のカットローカスと共役跡について調べる。」という問題に対して、2次元の場合を論文として完成させることができた。(Manuscripta Mathから公表予定)。この論文において、コンパクト、ノンコンパクトを問わず、広範なLiouville曲面において、一般点、楕円面の場合と同様の「単純な」カットローカスと共役跡を持つことが判った。特にノンコンパクトな場合では、2つの場合に大別されることが判った。2次曲面においては2葉双曲面と楕円放物面が各々の代表例となる。さらに2葉双曲面に代表される場合においては、カットローカスがいつも連結な場合と、2つの連結成分を持つ点がある場合の2つの場合が起こりうる。またこの時の「極」の集合についても連動して各々連結、不連結となっている。これにより、ノンコンパクトな場合については埋め込みを使ってコンパクトな場合に帰着させる方法が有用であることが判って来た。高次元の共役跡については論文の骨格を作る所までできた。さらに高次元コンパクトの場合のカットローカスの論文が公表された(Asian Journal Math)。この論文では楕円体を含む、高次元コンパクトなLiouville多様体の一般点のカットローカスが余次元1の閉球に微分同相であることを示した。証明の要点はヤコビ場の零点の分布についての詳細な結果を得たことである。これは楕円体の場合においてすら新しい結果と思われる

る。高次元の共役跡については論文を準備中であるがまだ完全に研究が終わっていない。現時点で得られている結果は次のようなものである。3次元以上の楕円体及びある種のLiouville多様体において、その一般点の共役跡の特異点集合は3つの連結成分からなり、それらはカスピダル・エッジであることがわかった。より詳しく言うと、そのうちの一つはその近傍がカスプ曲線と球面の直積の形であり、他の2つはカスプ曲線と球体の直積の形になっている。後者の境界部分についてはなおさらなる研究が必要である。共役跡の、その他の部分については、余次元1の滑らかな、はめ込まれた部分多様体になっている。また、多様体がn次元とすると、多様体が定曲率球面に近い場合、第n-1共役跡まで、類似の状況であることが判った。以上の結果は伊藤氏との共同研究である。

- (2) 前項に記した内容を整理し詳しくしたものをチェコ・プルノにおける研究集会で発表し、論文としてその研究集会のプロシーディングスに投稿した(公表予定)。主要な結果は、Liouville曲面において、ラプラシアン固有方程式を変数分離により、1変数の常微分方程式の組として表し、通常半古典近似をこの設定で説明した後、それが無効になる領域において、ラプラシアンの固有値に対する新しい半古典近似値を与えたことである。ここでの主要な方法は通常半古典近似が三角関数、Airy関数による近似を用いるのに対して、特異な場合はWeberの放物柱関数を用いて近似したことである。
- (3) 2つの論文を完成させた。ひとつはHermite-Liouville多様体の局所理論と射影空間上の大域的な例の構成を内容とするもので日本数学会の雑誌で公表された。特に局所理論は適当な非退化性の条件の下であるが、完全な分類がなされた。大域的な例については複素射影空間上に(局所分類の結果から見ても)十分に多くのHermite-Liouville多様体の構造を与えた。これらについては互いに同型になるための条件とKaehlerになるための条件も示した。もう一つの論文は射影同値の概念のケーラー版とエルミート版に関するもので、完全な局所理論と大域的性質に関する結果を含む。特にこの論文に詳しくは書いていないが、この場合の大域的例は日本数学会の雑誌に記述したものには含まれないものがある。前者は五十嵐氏と、後者は

Topalov氏との共同研究である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6件)

- ① K. Kiyohara, P. Topalov, On Liouville integrability of h-projectively equivalent Kaehler metrics, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 231--242. 査読有
- ② J. Itoh, K. Kiyohara, Cut loci and conjugate loci on Liouville surfaces, accepted in Manuscripta Math. 査読有
- ③ K. Kiyohara, Singular semi-classical approximation on Liouville surfaces, accepted in Diff. Geom. App. (Brno, 2010), accepted. 査読有
- ④ J. Itoh, K. Kiyohara, The Cut Loci on Ellipsoids and Certain Liouville Manifolds, Asian J. Math. 14, No. 2 (2010), 257--290. 査読有
- ⑤ M. Igarashi, K. Kiyohara, On Hermite-Liouville manifolds, J. Math. Soc. Japan, 62 (2010) 895-933. 査読有
- ⑥ J. Itoh, C. Vilcu, Criteria for farthest points on convex surfaces, Math. Nachrichten, 282 (2009), 1-11. 査読有

[学会発表] (計 10件)

- ① 清原一吉、「リウヴィル多様体上の半古典近似」、第18回沼津研究集会、2011年3月9日、沼津高専。
- ② 清原一吉、「A class of Hermitian manifolds with integrable geodesic flows and h-projective equivalence」、リーマン幾何と幾何解析、2011年2月19日(筑波大学)
- ③ K. Kiyohara, "Hermitian manifolds with integrable geodesic flows and h-projective equivalence", Workshop on Symplectic Geometry and Topology, Feb. 16, 2011 (京都大学)
- ④ 清原一吉、「Singular semi-classical approximation on Liouville surfaces」、シンプレクティック幾何とその周辺、2010年11月16日、秋田大学(放送大学秋田学習センター)

⑤K. Kiyohara, "Singular semi-classical approximation on Liouville surfaces", DGA2010, Aug 30, 2010, at Brno, Czech.

⑥K. Kiyohara, "Zeros of Jacobi fields and the conjugate loci on Liouville manifolds", Differential Geometry Seminar, 2009年9月21日、東海大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

清原 一吉 (KIYOHARA KAZUYOSHI)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号：80153245

### (2) 研究分担者

伊藤 仁一 (ITOU JINICHI)  
熊本大学・教育学部・教授  
研究者番号：20193493

### (3) 連携研究者

五十嵐 雅之 (IGARASHI MASAYUKI)  
東京理科大学・基礎工学部・准教授  
研究者番号：60256675

勝田 篤 (KATSUDA ATSUSHI)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：60183779