様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 30 日現在

機関番号：15501
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００７８
研究課題名（和文）リーマン等質空間とグラスマン幾何

研究課題名（英文）Riemannian homogeneous spaces and their Grassmann geometry

研究代表者
内藤　博夫（NAITO HIROO）
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：１０１２７７７２

研究成果の概要（和文）：リーマン幾何学の研究において，リーマン対称空間は最も重要な空間の１つであり，その等質部分多様体は，部分多様体の幾何学的研究において，重要な部分空間の例としてしばしば登場し,その分類理論の完成は重要な課題の１つとなっている。本研究は，その課題研究に偏微分方程式論を背景とするグラスマン幾何という解析的な手法を導入し，リーマン対称空間ではないがリーマン等質空間である３次元ユニモジュラーリー群での初動研究を通して，その手法の将来展望を探求したものである。

研究成果の概要（英文）：In the study of Riemannian geometry, a Riemannian symmetric space is one of the most important spaces and homogeneous submanifolds of Riemannian symmetric spaces often appear in the study of its submanifold theory as typical examples of subspaces. Therefore, the classification of homogeneous submanifolds is one of important problems to solve. In order to approach the classification problem, in this research we introduce an analytic method called Grassmann geometry, which is based on the theory of partial differential equations, and by applying it to surfaces of the 3-dimensional unimodular Lie groups with left invariant metric, which are in general not Riemannian symmetric spaces but homogeneous Riemannian manifolds, we investigate the effort of Grassmann geometry for the submanifold theory of Riemannian symmetric spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総　計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：微分幾何
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：対称空間，等質空間，部分多様体，グラスマン幾何，リー理論

１．研究開始当初の背景

リーマン等質空間は，リーマン幾何学が対象とする多様体の中でも，等質性において幾何学的美しさを有するとともに，その性質からリー群・リー代数の理論やそれらの表現論

等の代数的研究手法が非常に有効に働く空間である。それ故，従来から，様々な幾何学的現象が等質空間上で研究されてきた。特に，その代表的な空間であるリーマン対称空間については，リー理論の発展に伴って，２０世紀前半の E. Cartan による「リーマン対称空間の分類理論」の確立以降今日まで，多くの研究成果があげられている。また，リーマン幾何学発祥の動機づけとなった Gauss の古典的曲面論は，リーマン幾何学の中で，リーマン部分多様体として抽象化され，ユークリッド空間を始めとする定曲率空間や各種射影空間など典型的なリーマン対称空間において，その部分空間論として発展してきた。その中で，全体空間の等質性を受け継ぐリーマン等質部分多様体は，それぞれの部分空間論において，極めて重要な例を提供してきた。

グラスマン幾何は，１９８０年代に，Harvey と Lawson によって形式的に提唱された部分多様体の枠組みで，等質部分多様体の研究においては，部分多様体の接空間のリー代数的性質から大雑把に分類するという観点から極めて適合性がある。さらに，リーマン等質空間の部分多様体論においては，前述の等質部分多様体をモデルとする部分多様体論のほか，新たなグラスマン幾何的な部分多様体論を創出する可能性を秘めている。また，グラスマン幾何の枠組みにおける部分多様体の局所幾何学的性質は，局所座標を経由することによって，一階偏微分方程式系の解の研究に繋がっているという点で，解析的研究手法も非常に重要な状況になっている。

このような背景の下で，本研究に関連する事前研究として，「対称部分多様体の分類理論」や「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」の研究を研究代表者は行ってきた。前者の研究は，リーマン対称空間における典型的なグラスマン幾何的部分多様体である‘対称部分多様体’の分類を完成したものであり，更なる発展を目指す本研究においては，その動機づけを与えたものである。また，後者の研究は，一般にリーマン対称空間ではないが，様々な具体的検証が可能なリーマン等質空間である‘３次元ユニモジュラーリー群’におけるグラスマン幾何的曲面族に関する分布状況の初期研究で，本研究においては，その着眼点や研究方針を与えたものである。

２．研究の目的

このような背景の下，本研究の全体構想は，リーマン等質空間，特に，リーマン対称空間において，グラスマン幾何とリー表現論の視点から，グラスマン幾何的な部分多様体論の中から考察すべき重要なものを抽出するとともに，その結果として，リーマン対称空間の等質部分多様体の分類問題の解決に寄与することを目指す。

上記の全体構想における基本的な課題は，以下の３点に集約される。

（１）グラスマン幾何的な部分多様体論の枠組みを構築すること。

その後，

（２）グラスマン幾何的な各部分多様体論において，極小部分多様体など典型的な部分多様体の存在分析を通して，考察すべき重要な部分多様体論を抽出すること。

さらに，

（３）（２）で抽出された部分多様体論の中に等質部分多様体が存在するかどうかを判別し，グラスマン幾何的な部分多様体論の枠組みにおける等質部分多様体の存在状況を把握すること。

以上の全体構想の下で，本研究で取り組む具体的な研究計画を次の 2 つに集約した。

① 上記全体構想の課題（１），（２），（３）に関して，研究途中にある「3 次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」の研究を完成させ，「リーマン対称空間上のグラスマン幾何」を研究するためのイメージ作りを行うこと。

３次元ユニモジュラーリー群は，3 次元ユークリッド空間を除いて，冪零リー群である「3 次元 Heisenberg 群 H」，可解リー群である「ユークリッド平面の運動群 e(2)」及び「ミンコフスキー平面の運動群 e(1,1)」，単純リー群である「２次ユニタリ群 SU(2)」及び「２次特殊線形群 SL(2,R)」の５種類あり，単純リー群の場合を除いては，事前の初期研究で上記の課題について解決されている。研究計画 ① では，残された単純リー群の場合について課題の解決を図る。単純リー群はそのリー構造が対称空間と密接に関連している空間でもある。

② 次に，事前の研究「対称部分多様体の分類理論」で得られたリー理論的知見及び研究計画 ① で得られる研究イメージを基にして，「リーマン対称空間上のグラスマン幾何」に関して，全体構想の課題（１），（２），（３）の解決を図ること。

「対称部分多様体の分類」の研究では，課題（１）で挙げたグラスマン幾何的部分多様体論の枠組みが全測地的対称部分多様体の分類理論に帰着し，また，課題（２）で挙げた各枠組みにおける典型的なグラスマン幾何的部分多様体の存在分析についても，対応する一階偏微分方程式系の分析が線型方程式系の解の解析に帰着し，これらはともにリー表現論を用いて解決できた。さらに，課題（３）に関連して，対称部分多様体は，すべてリーマン等質空間になることが知られている。これらの事実から，本研究が目指す，より発展的な「対称空間上のグラスマン幾何」の研究にもリー理論が有効であることが期待できる。

３．研究の方法

研究期間の前半は，主に，「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」の研究（研究計画 ①)を完成させることに力を傾注し，また，後半は，前半の知見に立って,「リーマン対称空間上のグラスマン幾何」の研究（研究計画 ②）に力を傾注した。研究方法は，研究代表者が研究の中心を担い，研究集会等への参加を通じて学外の関連研究者と積極的に意見交換を行うとともに，学内において，研究分担者（中内，安藤，渡邉）や研究連携者（小宮）とそれぞれの関連分野の知見について情報交換を重ねながら研究を遂行した。

特に，平成２０年度は,「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何的曲面論」の初期研究の整理及び，その知見を踏まえた「リーマン対称空間上のグラスマン幾何的曲面論」の枠組みの考察（課題（１））を目標においた。そのため，主に，リー理論を用いた部分多様体論の学外関連研究者（塚田，田崎，間下等）と意見交換を行った。

また，平成２１年度は,「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」の研究の完成及び，前年度に引き続き,「リーマン対称空間上のグラスマン幾何的曲面論」の枠組み構築のための構想を練ることを目標とした。そのため，当該年度は，主に，曲面論に造詣の深い学外関連研究者（井ノ口，剣持，橋本等）との意見交換に重点をおいた。

最終年度である平成２２年度では，「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」に関する研究成果に基づき，「リーマン対称空間上のグラスマン幾何」における曲面論の構築を主たる目標とした。そのため，これまでの関連研究者を始め，幅広くその他の学外関連研究者（大仁田，前田，田丸等）と意見交換を重ねた。

４．研究成果

本研究の主な研究成果としては，「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」に関する研究（研究計画 ①）の課題達成と「リーマン対称空間上のグラスマン幾何」に関する研究（研究計画 ②）において，課題達成には至らなかったが，研究に対する具体的な将来展望を構築することができたことが挙げられる。また，本研究とは直接の関連性はないものの，研究分担者によるその分野での成果発表（項目５掲載の[雑誌論文] ①と④）が行われた。

「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」の研究では，自明な３次元ユークリッド空間及び非自明な５種類すべてのリー群上で，左不変計量に関するグラスマン幾何的曲面論を解明することができた。形式的な曲面論の総数は１５種類あり，その内，実質的な曲面論は１１種類あり，それぞれの曲面論が，平坦曲面，極小曲面，平均曲率一定曲面などの典型的な曲面の存在状況に関して，異なる様相を呈し，その違いが曲面論の基本方程式の１つである「ガウス方程式」によって支配されていることを詳細に示した。（項目５掲載の[雑誌論文] ③ 及び③と同一雑誌に投稿中の同じタイトル（Part Ⅱ）の論文）

また，「リーマン対称空間上のグラスマン幾何」の研究では，上記のユニモジュラーリー群上での研究成果の知見から，研究目的の全体構想にある基本課題（１）に関して，対称空間上の等質グラスマン束への等長変換群の作用に付随する各軌道にグラスマン幾何の枠組みが対応し，それぞれのグラスマン幾何的部分多様体論は軌道の等質構造に密接に関連していることが分った。特に，グラスマン幾何的曲面論においては，軌道の等質構造が対称空間の随伴表現の詳細に関連し，この解明が基本課題（２）の進展にも繋がることが展望できた。(項目５掲載の[学会発表] ① と ②) また，この研究過程において，対称部分多様体の研究知見から，複素射影空間の超曲面の幾何学に‘φ-不変性’という新しい概念を導入することができた。(項目５掲載の[雑誌論文] ① と [学会発表] ③)

本研究の特徴は、等質部分多様体の研究において，リー理論の表現論的な視点に加え，偏微分方程式論と関連深いグラスマン幾何的な視点を加えたことである。また，対称空間の等質部分多様体は様々な部分多様体の幾何学の中に重要な例として登場するとともに，その分類理論の構築は，表現論的にも，1950 年代の D.B. Dynkin による半単純リー代数の半単純リー部分代数の分類研究以降の重要な課題の１つとなっている。本研究は，この分類問題の解明について理解を深めることを目指した点で，幾何学における部分多様体の研究及びリー表現論の研究への新しいアプローチ方法として学術的貢献をすることが期待できる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４ 件）

① Kawai Shigeo, Nakauchi Nobumitsu, Some results for stationary maps of a functional related to pullback m

etrics, Nonlinear Analysis, 査読有, Vol.74, 2011, 2284-2295

② Maeda, Sadahiro, Naitoh Hiroo, Real hypersurfaces with ϕ-invariant shape operator in a complex projective space, Glasgow Mathematical Journal, 査読有, Vol.53, 2011, 347-358 (online publish: 2010 Dec.)

③ Inoguchi Jun-ichi, Hiroo Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups I,Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, Vol.38, 2009, 427-496

④ Ando Yoshifumi, Cobordisms of maps with singularities of given class, Algebraic and Geometric Topology, 査読有, Vol.8, 2008, 1989-2029

〔学会発表〕(計５件)

① 内藤 博夫, 対称空間の曲面論へのグラスマン幾何的アプローチ, 研究集会「部分多様体論・湯沢2010」, 2010年11月27日, 新潟県湯沢町・湯沢グランドホテル

② 内藤 博夫, 対称空間の曲面論へのグラスマン幾何的アプローチ, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」, 2010年9月9日,東京, 東京理科大学・森戸記念館

③ 前田 定廣, 内藤 博夫, 複素射影空間内の型作用素がϕ-不変な実超曲面, 日本数学会2010年度年会幾何学分科会(一般講演), 2010年3月24日,東京, 慶応大学

④ 内藤 博夫, 対称空間の全測地的部分多様体の分類問題へのコンピュータ活用, 研究集会「部分多様体論・湯沢2009」, 2009年11月26日, 新潟県湯沢町・湯沢グランドホテル

⑤ 内藤 博夫, Unimodular Lie 群上のグラスマン幾何, 広島幾何学研究集会2008「リー群と幾何構造」, 2008年10月９日,広島 ,広島大学

〔図書〕(計０件)

〔産業財産権〕(計０件)
○出願状況(計０件)
○取得状況(計０件)

〔その他〕なし

６．研究組織

(1)研究代表者
内藤 博夫 (NAITO HIROO)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：10127772

(2)研究分担者
中内 伸光 (NAKAUCHI NOBUMITSU)
山口大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：50180237
安藤 良文 (ANDO YOSHIFUMI)
山口大学・名誉教授
研究者番号：80001840
渡邉 正 (WATANABE TADASHI)
山口大学・教育学部・教授
研究者番号：10107724
(H20 研究分担者)

(3)連携研究者
小宮 克弘 (KOMIYA KATSUHIRO)
山口大学・名誉教授
研究者番号：00034744
(H20 研究連携者)