様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月２０日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００８１
研究課題名（和文）　ベクトル束のモジュライと調和写像の一般化

研究課題名（英文）　Moduli spaces of vector bundles and a generalization of harmonic maps
研究代表者
長友　康行（NAGATOMO YASUYUKI）
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：１０２６６０７５

研究成果の概要（和文）：グラスマン多様体への調和写像の線型方程式による特徴づけを利用して、対称空間上に等径関数を構成し、さらにラドン変換により、それら等径関数が球面上の等径関数に変換されることを示した。また、複素射影空間から複素射影空間への定エネルギー密度関数をもつ調和写像のモジュライ空間を線形代数的データを用いて記述した。最後に、エルミート対称空間から複素グラスマン多様体への正則写像に関しても同様の結果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：Using a characterization of harmonic maps into Grassmannians by linear equations, we construct isoparametric functions on symmetric spaces. Moreover, these are transformed into isoparametric functions on spheres by Radon transform. We describe a moduli space of harmonic maps between complex projective spaces with constant energy densities by linear algebraic datum. We also describe a moduli spaces of holomorphic maps from Hermitian symmetric spaces into complex Grassmannian manifolds in a similar method.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何

1．研究開始当初の背景

(1) 球面への調和写像に対する高橋の定理は調和写像の方程式を、関数に対する線型方程式と関連付ける結果であり、当初はよく利用された定理でもあった。しかし同時に、半世紀近く、孤立した結果でもあった。これに対して研究代表者は、高橋の定理に、関数に対する方程式ではなく、ベクトル束の切断に対する定式化を与えることにより、コンパクト型の対称空間への調和写像に対する結果へと拡張した。

(2) 球面上の等径関数はよく研究されている対象であり、今なお分類問題をはじめとした多くの研究がある。しかしながら、球面以外のリーマン多様体上の等径関数に対する研究は極端に少ない。また、球面以外の多様体上では他の定式化による等径部分多様体の一般化が考察されるなど、等径関数の研究の困難さが現れていた。そこで、まず球面以外のリーマン多様体上で等径関数の例を構成することは期待されることであ

り、その性質を調べることは重要事項であった。

2. 研究の目的

(1) 調和写像とベクトル束、およびその切断の関連を考慮し、ベクトル束の切断の微分幾何学を構築すること。

(2) ある性質をもつ調和写像のモジュライ空間の一般的な構成法を個々の場合に精査し、より詳しく研究すること。

(3) ツイスター切断の零点集合の位相的、微分幾何的な性質を調べ、ベクトル束のモジュライ空間の研究に貢献すること。

3. 研究の方法

(1) 構築すべき一般論の形を探る上で、具体例の構成は欠かせないので、まず対称空間やその上のベクトル束を調べることが基本となる。その際、リー群の表現論や正則ベクトル束に関連した代数幾何学的手法が重要となる。

(2) 退化した反自己双対接続を調べる際に、Tian 氏は Calibrated Geometry の観点から、特異集合が極小部分多様体となることを示している。この結果は研究代表者のツイスター切断を用いたインスタントンのモジュライの研究結果と合致しており、後者の場合には極小部分多様体ではなく、全測地的部分多様体が現れた。そこで、Tian 氏に代表される解析的手法の導入が大切である。

(3) 研究成果を発表し、さまざまな分野の研究者との議論の機会を増やすことも重要である。特に海外の研究者に触発されたアイディアが本研究には多いことから、引き続き海外の研究者と直接的、間接的に議論していくことも大切である。

4. 研究成果

(1) 2007度までにリーマン多様体からグラスマン多様体への写像が調和写像となるための必要十分条件を得ることに成功していた。この定理は、グラスマン多様体が球面であるときには、極小曲面に関する「高橋の定理」を含み、またグラスマン多様体が複素射影空間である場合には小平埋め込み定理を例として含む。この理論を利用して、一般論はおろか具体例すらあまり知られていなかった調和写像の例を組織的に構成できた。また、ある条件をみたす調和写像のモジュライ空間を線形代数的なデータを使って記述した。この構成はインスタントンに対するADHM構成法とよく似ているが、両者ともに非線型方程式の背後に線型方程式が存在することにその因がある。また、最終的に、「高橋型の定理」をリーマン多様体からコンパクト型の対称空間への調和写像に対する定理として拡張することができた。これらに関する結果は、すでにひとつの論文にまとめられている。また、2009年度の日本数学会幾何学分科会において特別講演を行った。

(2) 次に、2007度までに「ツイスター切断の幾何学」の類似をコンパクト対称空間上で展開した結果、ほとんどのコンパクト型の既約対称空間において、全測地的部分多様体の組を発見し、ベクトル束の切断から得られる関数が、グラスマン多様体上では等径関数となっていることを示していた。本研究においてさらに同様の方法で得られる関数がほとんどの場合、等径関数となっていることを示すことができた。この関数が部分多様体の族を与え、このうち唯一つ極小部分多様体が存在することを示すこともできた。ただし例外的な場合があり、この場合、上記のように構成された関数は等径関数ではない。ところが、もうひとつ独立な関数を構成でき、このふたつがベクトル空間に値をもつ等径関数となることを示すことができた。この例外的な現象は、最初の切断から、さらに新しいベクトル束上の切断を構成でき、その新しい切断がより大きな対称性を持つことに起因している。これらに関する結果も、すでに論文としてまとめられている。また、2010年度の幾何学シンポジウムにおける基調講演でその概要を報告した。

(3) これらの研究とは若干異なるが、四元数ケーラー多様体の典型的な例である四元数射影空間において、実8次元の場合に、U(1)作用を考えその商である実7次元多様体に calibrated G2 構造を与えることに成功した。これは、いかなるU(1)作用でも定義される構造だが、特別な U(1)作用では、いわゆる G2 構造になるものと期待している。

(4) (2)に記したようにコンパクト対称空間上のベクトル束とその切断を利用して、全測地的部分多様体の組と等径関数を構成し、新たな調和写像の例として等径部分多様体の族内にただひとつ極小部分多様体が存在することを示したが、さらにこれらの部分多様体の族に対して定義される不変量がベクトル束とその接続から得られる不変量により計算されることを示した。代数幾何学や位相幾何学においては、ベクトル束とその切断に対して切断の零点集合はベクトル束の位相不変量と密接な関係にあり、深く研究されている対象である。しかるに微分幾何学的不変量にもまた、上記のような関係が存在することはまだ研究されていないものと思われる。この不変量の計算においては、これまでのグラスマン多様体への調和写像の研究がその基礎となっている。これらに関する結果は現在執筆中の論文にまとめられている。

(5) 例外型リー群F4を等長変換群とする対称空間において、微分幾何学的に定義される四元数ケーラー構造を特徴付けるベクトル束の特性類を用いて、整係数コホモロジー群の生成元を説明することに成功した。これも今までに得られたグラスマン多様体への全測地的はめ込みの理論の元になったツイスター切断の幾何学が重要な役割を負っている。これらに関する結果はすでに論文にまとめられ、国際的学術誌へ掲載決定された。

(6) ケーラー多様体から複素グラスマン多様体へのエネルギー密度が一定の正則写像のモジュライ空間を線形代数的データにより記述することにも成功した。正則写像は調和写像となるので、グラスマン多様体への調和写像の理論を応用することが出来るが、計量と正則構造から得られる一意的な接続の存在が方程式の個数を減らし、記述を特別なものにしている。この結果は国際研究集会の紀要として発表された。

(7) 対称空間上で組織的に構成された等径関数に対して、ラドン変換を定義し、これらの関数が球面上の等径関数に変換されることを示した。球面上の等径関数はよく研究されている対象であるが、このような関係が存在することを指摘したのは本研究が初めてである。これらに関する結果はすでに論文としてまとめられ、投稿中である。また、これから派生して、球面上の等径関数が、不変接続とも関連があることが理解できたので、これに関しても論文を作成する予定である。

(8) リーマン多様体からグラスマン多様体への調和写像に関する一般化された高橋の定理を利用して、複素射影空間から複素射影空間への調和写像に関する結果を得た。第一に、複素射影直線から複素射影空間への定エネルギー密度関数をもつ調和写像は標準的なものに限るという板東-大仁田の定理の別証明を得た。次に複素射影空間から複素射影空間への定エネルギー密度関数をもつ正則写像は標準的なものに限るという結果を得た。これはCalabiによる結果の一部であるが、やはり別証明を与えている。最後に複素射影空間から複素射影空間への定エネルギー密度関数をもつ調和写像に関して、この写像が複素直線束の標準的な接続を保つならば、Tothの定義した多項式写像といわれる調和写像になることを示せた。この結果は、Tothにおいては若干人工的ではあるが、論理展開のためには必要不可欠である多項式写像といわれる対象が、自然なものであることを示している。
さらにTothの結果を利用すれば、前記二つの「剛性定理」とは異なり、モジュライ空間の存在を示すこともできる。これらの結果は現在執筆中の論文にまとめられている。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)

① Yasuyuki Nagatomo, Harmonic maps into Grassmannians and a generalization of do Carmo-Wallach theorem, Proceedings of the 16th OCU International Academic Symposium 2008, "Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization",査読有, OCAMI Studies Volume 3, 2010, 41-52

②Rafael Herrera, Yasuyuki Nagatomo, A note on the topology and geometry of F_4I, Rendiconti di Matematica e sue Applicazioni, 査読有, 30, 2010, 183-193

③長友康行、グラスマン多様体内の全測地的部分多様体, 数理解析研究所講究録, 査読無、1668, 2009, pp.1-6

④Yasuyuki Nagatomo, Twistor sections on the Wolf spaces, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有 ,360, 2008, pp.4497-4517

〔学会発表〕(計 23件)

①長友康行、2011.3.22, 複素射影直線から複素射影空間への調和写像に関する剛性定理(板東-大仁田の結果)の別証明, 早稲田大学, 日本数学会 幾何学分科会 一般講演, 2011.3.20-3.23.

② Yasuyuki Nagatomo, 2011.3.15, Harmonic maps into Grassmannians and its applications to isoparametric functions and moduli problems, 大阪市立大学, 3rd OCAMI-TIMS workshop, 2011.3.13-3.15.

③長友康行、2010.11.26, 対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換, 湯沢グランドホテル, 第15回湯沢研究会, 2010.11.25-11.27.

④Yasuyuki Nagatomo, 2010.9.28, Holomorphic maps from Hermitian symmetric spaces into Grassmannians, NASPA ニューオータニ、越後湯沢, Lie Transformation Groups and Complex Geometry, 2010.9.26-29.

⑤長友康行、2010.9.9, 対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換, 東京理科大学森戸記念館, 部分多様体幾何とリー群作用2010, 2010.9.8-9.10.

⑥ Yasuyuki Nagatomo, 2010.8.24, Vector bundles, isoparametric functions and Radon transforms on symmetric spaces, 東北大学, Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems, 2010.8.24-8.27.

⑦長友康行、2010.8.9, 対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換, 神戸大学,第57回幾何学シンポジウム 基調講演, 2010.8.6

-8.9.

⑧<u>長友康行</u>、<u>高橋正郎</u>、2010.3.26，対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換，慶応義塾大学，日本数学会　幾何学分科会　一般講演，2010.3.24-3.27.

⑨ <u>Yasuyuki Nagatomo</u>, 2010.3.4, Vector bundles, isoparametric functions and Radon transforms on symmetric spaces, Centro de Investigaci¥'on en Matem¥'aticas, A.C, Mexico, Seminario de Geometr¥'ia Diferencial, 2010.3.4.

⑩<u>長友康行</u>、2009.12.20，対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換，筑波大学，筑波大学微分幾何学研究集会－伊藤教授退職記念－，2009.12.19-12.20.

⑪<u>長友康行</u>、2009.11.26，グラスマン多様体内の全測地的部分多様体，湯沢グランドホテル，第14回湯沢研究会，2009.11.26-11.28.

⑫<u>長友康行</u>、2009.9.24，グラスマン多様体内の全測地的部分多様体，大阪大学，日本数学会　幾何学分科会　一般講演，2009.9.24-9.27.

⑬<u>長友康行</u>、2009.6.22，グラスマン多様体内の全測地的部分多様体，京都大学数理解析研究所，部分多様体論とその周辺領域における新たな研究対象，2009.6.22-24.

⑭<u>長友康行</u>、2009.3.26，グラスマン多様体への調和写像，東京大学,日本数学会　幾何学分科会　特別講演，2009.3.26-29.

⑮<u>長友康行</u>、2009.3.9，グラスマン多様体への調和写像，名城大学，名城大学研究集会,2009.3.9-3.11.

⑯<u>Yasuyuki Nagatomo</u>，2008.12.17，Harmonic maps into Grassmannian manifolds,大阪市立大学，第16回国際学術シンポジウム「リーマン面、調和写像と可視化」，2008.12.15-12.20.

⑰<u>長友康行</u>、2008.11.24，グラスマン多様体への調和写像，湯沢グランドホテル，第13回湯沢研究会，2008.11.23-11.25.

⑱ <u>Yasuyuki Nagatomo</u>, 2008.10.24, Totally geodesic immersions into Grassmannian manifolds，菅平高原プチホテルゾンタック，14th International Symposium on Complex Geometry, 2008.10.22-10.25.

⑲<u>長友康行</u>、2008.9.24，グラスマン多様体への調和写像，東京工業大学，日本数学会　幾何学分科会　一般講演, 2008.9.24-9.27.

⑳ <u>Yasuyuki Nagatomo</u>, 2008.8.26, Totally geodesic immersion into Grassmannian manifolds，東京大学玉原セミナーハウス，JSPS-RFBR Workshop Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization, 2008.8.24-30.

6．研究組織

(1)研究代表者

長友　康行（NAGATOMO YASUYUKI）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：10266075

(2)研究分担者／なし

(3)連携研究者

高橋　正郎（TAKAHASHI MASAROU）
久留米工業高等専門学校・一般科目理科系・准教授
研究者番号：70311107