

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 1日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540083

研究課題名（和文） 4次元多様体内の曲面とその変形の研究

研究課題名（英文） Topological studies on the surface embedded on 4-dimensional manifolds and their deformations

研究代表者

廣瀬 進 (HIROSE SUSUMU)

東京理科大学・理工学部・准教授

研究者番号：10264144

研究成果の概要（和文）：

4次元多様体に埋め込まれた閉曲面の変形と写像類群に関わる研究を推進するため、閉曲面の写像類群に関する位相幾何学的な観点からの研究を行った。特に、位数の大きな周期的写像の一意性、3次元球面内に埋め込まれた境界付きの曲面の正則ホモトピックな変形、ハンドル体の写像類群のニールセン実現不可能性、4次元球面に標準的に埋め込まれた向き付け不可能閉曲面の写像類群について結果を得た。

研究成果の概要（英文）：

In order to improve the study on deformations and the mapping class groups of closed surfaces embedded in 4-manifolds, we made several researches on the mapping class group from the topological viewpoint. Especially, we obtained results on the uniqueness of periodic maps with large periods, the regular homotopic deformations of the bounded surface embedded in the 3-sphere, the Nielsen realization problems on the mapping class groups of the 3-dimensional handlebodies, and the mapping class groups of the nonorientable closed surfaces standardly embedded in the 4-sphere.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 2008年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2009年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 2010年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 2011年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,400,000 | 1,020,000 | 4,420,000 |

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学、低次元トポロジー、写像類群、曲面結び目、4次元多様体

1. 研究開始当初の背景

4次元多様体内に埋め込まれた曲面を4次元多様体内で変形する事により、曲面上に非自明な写像が引き起こされる事がある。例えば、非特異楕円曲線は複素射影平面へのトーラ

スの埋め込みと見なす事が出来るが、この埋め込みを定める楕円関数のパラメーターを変化させる事により、トーラス上の向きを保つ全ての同相写像が (up to isotopy で) 非特異楕円曲線の変形により引き起こされる事がわかる。このような現象を知る事は、4次

元多様体内の曲面の位置の問題や、曲面の写像類群に関連した興味深い問題であるが、Montesinos による 4 次元球面に標準的に埋め込まれたトーラスに関する研究、岩瀬順一氏（金沢大学）によるトーラス結び目のスパンに関する研究以外には行われていなかった。

研究代表者は、この問題に興味を持ち、一般の結び目のスパン、4 次元球面や複素射影平面に標準的に埋め込まれた一般の種数の有向閉曲面について研究を行い、さらに、安原晃氏（東京学芸大学）との共同研究により、4 次元多様体内にいかなる写像も拡張できるような閉曲面（flexible な曲面）が存在するための条件や、4 次元多様体内の閉曲面を flexible なものに改変する操作の存在について研究を行った。

2. 研究の目的

4 次元多様体内に埋め込まれた閉曲面を 4 次元多様体内で変形する事により引き起こされる曲面上の写像の研究を推進するために、主に以下の研究を行う。

(1) 4 次元多様体の 2 次ホモロジー類の flexible な曲面による実現可能性の研究

(2) 4 次元球面内に標準的に埋め込まれた向き付け不可能閉曲面の写像類群の研究

(3) 曲面上の周期的写像と、その 4 次元球面内での Nielsen 実現可能性の研究

3. 研究の方法

(1) 閉曲面上の周期的写像の存在や分類に関連して、2 次元の軌道体について詳細な考察を行った。

(2) 4 次元多様体内の曲面の変形を考える test case として、3 次元空間内の曲面の正則ホモトピックな変形と曲面の linking form の関連について考察を行った。

(3) 4 次元多様体上への写像の拡張可能性を研究するために、基本的な 3 次元多様体である 3 次元ハンドル体の写像類群について考察した。とりわけ、3 次元ハンドル体上における lantern relation の考察を通じて、有理係数の 1 次のホモロジー群を求めた。

(4) 向き付け不可能閉曲面上の写像類群の level 2 部分群の生成系に関する考察や、向き付け不可能閉曲面の 1 次のホモロジー群上のある種の直交群の生成系に関する議論を行う事により、Guillou-Marin の 2 次形式を

保つ写像類群の部分群の生成系を求めた。

4. 研究成果

閉曲面上の写像類群の研究を行い、以下の成果を挙げた。

(1) 大きな位数の周期的写像の一意性に関する研究：

高知工科大学の笠原泰氏との共同研究により、位数が $8g/3$ よりも大きい周期的写像についてある種の一意性が成り立つことを示した。

(2) 3 次元球面内に埋め込まれた境界付きコンパクト曲面の正則ホモトピックな変形と写像類群の関わりに関する研究：

境界付コンパクト曲面の 3 次元球面への埋め込みの正則ホモトピーによる変形がひき起こすねじりのなす群について、東京学芸大学の安原晃氏と共同研究を行い、曲面上の写像がその群に含まれるための必要十分条件は、埋め込みに対するザイフェルト形式から定まる 2 次形式を保つことであること、この変形としては、pass move と呼ばれる変形のみを用いれば十分であることを示し、その変形でいくつの pass move が必要か求める公式を得た。

(3) ハンドル体の写像類群の一般ニールセン実現についての研究：

向き付けられた閉曲面上の同相写像の群から写像類群への自然な全射の右逆写像が、種数が 2 以上の場合には存在しないことが知られている。3 次元ハンドル体の写像類群について同様の問題を考え、種数 5 以上の場合に同様の現象が起こることを示した。

(4) 4 次元球面内に標準的に埋め込まれた向き付け不可能閉曲面の写像類群についての研究：

4 次元球面内に埋め込まれた向き付け可能な閉曲面上の可微分同相写像が、球面全体の可微分同相写像に拡張できるための必要十分条件が Rokhlin の 2 次形式を保つことであるという事実が、向き付け不可能な閉曲面についても成立するか、すなわち、Guillou-Marin の 2 次形式を保つことが拡張可能であるための必要十分条件となるかについて研究し、ある種の標準的な埋め込みの場合については、上記の事実が成り立つ事を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① Susumu Hirose, “On diffeomorphisms over nonorientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere”, *Algebraic and Geometric Topology*, vol. 12, (2012), 109–130, 査読あり.
- ② Susumu Hirose, “On diffeomorphisms over non-orientable surfaces embedded in the 4-sphere”, *数理解析研究所講究録*, 1766, (2011), 81–90, 査読なし.
- ③ Susumu Hirose, Akira Yasuhara, “Regular homotopic deformation of compact surface with boundary and mapping class group”, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, vol. 20, (2011), 1391–1396, 査読あり.
- ④ Susumu Hirose, “Pseudo-Anosov elements of mapping class groups of Heegaard surfaces of the 3-sphere”, *Kodai Mathematical Journal*, vol. 34, (2011), 132–139, 査読あり.
- ⑤ Susumu Hirose, “On periodic maps over surfaces with large periods”, *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 62, (2010), 45–53, 査読あり.
- ⑥ Susumu Hirose, “Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4”, *Osaka Journal of Mathematics*, vol. 47, (2010), 385–421, 査読あり.
- ⑦ Susumu Hirose, “Realization of the mapping class group of handlebody by diffeomorphisms”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 138, (2010), 4157–4159, 査読あり.

[学会発表] (計23件)

- ① 廣瀬 進, 4次元球面に標準的に埋め込まれた向き付け不可能閉曲面上の同相写像の拡張可能性について, 東工大トポロジーセミナー, 2012年1月18日, 東京工業大学.
- ② Susumu Hirose, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere, The 8th East Asian School of Knots and Related Topics, 2012年1月11日, KAIST, Daejeon, Korea.
- ③ 廣瀬 進, 向き付け不可能閉曲面のレベル2写像類群の生成系とその応用, 早稲田大学教育学部トポロジーセミナー, 2011年7月2日, 早稲田大学.
- ④ 廣瀬 進, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces embedded in the 4-sphere, Intelligence of Low-dimensional

Topology, 2011年5月27日, 京都大学 数理解析研究所.

- ⑤ 廣瀬 進, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces embedded in the 4-sphere, トポロジー火曜セミナー, 2011年4月12日, 東京大学大学院数理学研究科.
- ⑥ 廣瀬 進, 向き付け不可能閉曲面のレベル2写像類群の生成系について, 低次元トポロジーセミナー, 2011年2月8日, 大阪大学.
- ⑦ 廣瀬 進, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere and the level-2 mapping class group, 研究集会「4次元トポロジー」, 2010年11月15日, 広島大学.
- ⑧ 廣瀬 進, 向き付け不可能曲面のレベル2写像類群の生成系について, 日本数学会2010年度秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学.
- ⑨ Susumu Hirose, Abelianization and Nielsen realization problem of the mapping class group of handlebody, KIAS workshop on hyperbolic geometry and related topics, 2010年9月17日, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Korea.
- ⑩ 廣瀬 進, 3次元ハンドル体の写像類群のアーベル化とニールセン実現不可能性, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2010年9月7日, 東京大学.
- ⑪ 廣瀬 進, On mapping class groups of surfaces embedded in low-dimensional manifolds, Workshop(s): Lefschetz fibration and category theory, 2010年6月25日, 大阪大学.
- ⑫ 廣瀬 進, 3次元ハンドル体の写像類群のアーベル化とニールセン実現不可能性, トポロジー金曜セミナー, 2010年4月23日, 九州大学.
- ⑬ 廣瀬 進, ハンドル体の写像類群のNielsen実現不可能性, 2009年度日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月25日, 大阪大学.
- ⑭ 廣瀬 進, 超楕円のレフシェッツ・ファイバー空間の実例の構成について, トポロジー金曜セミナー, 2009年7月10日, 九州大学.
- ⑮ 廣瀬 進, Realization of the mapping class group of handlebody by diffeomorphisms and examples of pseudo-Anosov maps, “Simplicial Complexes Arising in Low-Dimensional Topology”, 2009年7月2日, 東京工業大学.
- ⑯ 廣瀬 進, ハンドル体の写像類群のニールセン実現と擬アノソフ同相写像の実例, トポロジー金曜セミナー, 2009年6月19日, 九州大学.

⑰廣瀬 進, Realization of the mapping class group of 3-dimensional handlebody by diffeomorphisms, “Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics”, 2009年3月9日, 広島大学.

⑱廣瀬 進, 大きな周期の周期的写像の一意性について, 東工大複素解析セミナー, 2009年2月3日, 東京工業大学.

⑲廣瀬 進, 大きな周期の周期的写像について, 低次元トポロジーセミナー, 2008年11月18日, 大阪大学.

⑳廣瀬 進, On periodic maps over surfaces with large periods, “Workshop on Geometry and Topology of Mapping class groups”, 2008年11月13日, あきた白神体験センター.

㉑廣瀬 進, On periodic maps over surfaces with large periods, 広島大学 トポロジー・幾何セミナー, 2008年10月21日, 広島大学.

㉒廣瀬 進, 閉曲面上の大きな周期の周期的写像について, 2008年度日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学.

㉓廣瀬 進, 大きな周期の周期的写像について, トポロジー金曜セミナー, 2008年7月4日, 九州大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣瀬 進 (HIROSE SUSUMU)
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号:

(2) 研究分担者

前田 定廣 (MAEDA SADAHIRO)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号: 40181581

市川 尚志 (ICHIKAWA TAKASHI)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号: 20201923