

機関番号：17401
 研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2008 ～ 2010
 課題番号：20540085
 研究課題名 (和文) 最小跡に関連する諸問題と Jacobi の最終定理の一般化
 研究課題名 (英文) Related problems of cut locus
 and a generalization of Jacobi's last theorem
 研究代表者
 伊藤 仁一 (ITO H JIN-ICHI)
 熊本大学・教育学部・教授
 研究者番号：20193493

研究成果の概要 (和文)：楕円面の最小跡は楕円座標上の弧であり、また共役跡は丁度 4 つの尖点を持つというのが Jacobi の最終定理として知られている。この研究では、一般次元の楕円面上の一般の点の最小跡の構造を決定するとともに、共役跡の構造とその特異点集合の様子について解明した。また、ある種の Liouville 多様体の最小関や、更に、一般の曲面の最小跡の構造とグラフとの関連等を調べた。

研究成果の概要 (英文)：The cut locus of an ellipsoid is an arc on the elliptic coordinate, and the conjugate locus has exactly 4 cusps which is known as Jacobi's last theorem. In this study we determined the cut locus on a general dimensional ellipsoid, and determined the structure of conjugate locus and its singularities. Moreover we studied cut loci of some kind of Liouville manifolds and the relations of cut locus of general surfaces and graphs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学, 測地線, 最小跡, 共役跡,

1. 研究開始当初の背景

最小跡の研究は、H. Poincare による曲面の位相との関連から始まり、その後の長く研究され続けてきた。最近、最小跡までの距離関数の Lipschitz 性を示し、Ambrose の問題が曲面で肯定的に解決し、楕円面の一般の点の最小跡の決定し、Jacobi の定理(共役跡の尖点は 4 つ)に完全な証明を与えた。

2. 研究の目的

本研究の第 1 の目的は、一般次元の楕円面

の最小跡と共役跡の決定 (Jacobi の定理の一般化) を目指すものである。

第 2 の目的は、多くの最小跡に関連する諸問題、例えば、曲面の最小跡とグラフとの関連、一般次元の Ambrose の問題や、最遠点集合に関する Steinhaus の問題、距離関数の臨界点に関する問題、凸多面体の展開 (unfolding) に関する問題、等々についても重要な進展を目指すものである。

最小跡の研究は、幾何学のみでなく、計算機科学への応用としても重要である。

3. 研究の方法

- (1) 現段階である程度得られている多くの結果を、まず論文にまとめ発表する。
- ① 非コンパクト二次曲面に近いある種の Liouville 曲面の最小跡は弧である。
 - ② n 次元の楕円面に近い Liouville 多様体の最小跡は、ひとつの楕円座標が一定である $n-1$ 次元 disk に位相同形である。
 - ③ 一般の 2 次曲面の「糸による構成 (thread construction)」の第 1 積分を用いる現代的な証明 (3 次元空間内の楕円面に関してだけは 1989 年に O. Staude によって複雑な証明が知られている)。
 - ④ 擬測地線が自己交差しない凸曲面を特徴づける問題 (いくらでも長い単純な擬測地線があれば、等積四面体となることを示した)。
 - ⑤ 曲面のどの点もある距離関数の臨界点となることとそのような距離関数の個数評価。
 - ⑥ 凸曲面における最遠点となりうる集合を単純擬閉測地線を用いて特徴付、
- (2) 本研究の中心テーマである, Jacobi の最終定理 (楕円面の第 1 共役跡は丁度 4 つの cusp を持つ) の一般次元への拡張の可能性についても, 先行研究において大体の予想と証明方法がまとまっているので, その細かい部分をつめ, 一般化された Jacobi の最終定理することである。
- (3) 全てのグラフはどれかの曲面の最小跡となりうることに既に示せたので, 向き付け可能曲面やその種数の制限によって最小跡となりうるグラフの性質を調べる, 更に, 種数 2 の向き付け可能曲面の最小跡となるグラフを完全に分類し, 最小跡の本質的部分や cycles の長さの評価に応用する。
- (4) 多面体の展開 (unfolding) として, 単純擬閉測地線を用いた star unfolding が可能であることが昨年分かったので, 更に, 単純閉擬測地線とその最小跡を用いた展開や, 面とその最小跡を用いた展開が可能であることを証明することを計画している。

本研究は多くの共同研究から成り立っており, 共同研究者と直接会っての詳細な議論が必要不可欠であり, また多くの他分野との関連も深く, それらの研究者の研究協力や専門知識の供与を必要であり, そのための出張を計画して

いる。

4. 研究成果

- (1) 研究期間内に 24 編の学術論文が発表及び受理された。その中には当初の計画されていなかったものも含まれている。また, 当初の予定よりおくれてまだ論文の形にまとまっていないものもあるが, 3 年間の数学の論文数としては十分な成果と言える。また, 海外で 14 回, 国内で 34 回の研究発表を行った。

その中で中心的なものは以下の定理である (分担者との共同研究)。M を $n+1$ 次元ユークリッド空間内にすべての軸の長さが異なる n 次元楕円面を軸が座標軸上に来るようにとり, 2 次元の場合の 4 つの隣点に対応する余次元 2 の部分多様体 J を定義する。

定理 1. (1) p が J 以外の点なら p の最小跡は $n-1$ 次元の閉球に微分同相である。それは p の対称点を含み楕円座標による一つの座標面上にある。(2) p が J の点なら, p の最小跡は $n-2$ 次元の閉球に微分同相であり, それは J が乗っておるユークリッド空間の座標が 0 で定義される余次元 1 の楕円面での最小跡に一致する。

更に, 楕円面に近いある種の Liouville 多様体でも同様の結果を発表した。

- (2) Jacobi の最終定理 (楕円面の第 1 共役跡は丁度 4 つの cusp を持つ) に関して, 以下のような定理としてまとめた (分担者との共同研究)。M を $n+1$ 次元ユークリッド空間の n 次元楕円面として, p をその一般の点とする。

定理 2. p の第 1 共役跡はの特異点集合は 3 つの連結成分からなり, 一つは $n-2$ 次元球面に微分同相な cuspidal edge であり, 残りの 2 つはその内部が $n-2$ 次元開球に微分同相な cuspidal edge である。

更に, 楕円面が球面に十分近いときには以下の定理が成り立つ。

定理 3. p の i 番目の共役跡 ($1 < i < n-1$) の特異点集合は, 2 つの連結成分からなり, その内部は, $n-1-i$ 次元球面と $i-1$ 次元開球体との直積と $n-1-i$ 次元開球体と $i-1$ 次元球面との直積に微分同相な cuspidal edge となる。

- (3) 曲面の最小跡はグラフの構造を持っているが, 任意の距離グラフに対して, 最小跡を与えられたグラフとなるような曲面

とそのリーマン計量があることを示し、さらに種数が低い曲面に対して最小跡とその近傍の構造を分類を行った。一部は受理されて、他は投稿中であり、また非コンパクト曲面の場合も考察し始めた。(Vilcu氏との共同研究)

- (4) 単純閉擬測地線を用いた多面体の展開に関して論文を公表した。更に、単純閉擬測地線の最小跡を用いての多面体の展開及び面の最小跡を用いての多面体の展開についても議論し、国際会議で共同研究者が発表した。(O'Rourke氏, Vilcu氏との共同研究)
- (5) 新たに始まった共同研究として、凸体に対して1以下の moderation 数を定義し、平面の上の円の場合が1となり、円からの遠さを議論した(T. Zamfirescu氏), フィンズラー計量に N-extremal 曲線を定義してある種の Gauss-Bonnet の定理を示した(島田氏, Sabau氏), 正12面体上の閉測地線の分類(田上氏), 多面体の場合の Kelvin 問題(奈良氏), グラフの最小跡について定義しその性質を議論し始めた(C. Zamfirescu氏), 正12面体の3番目の fixing circle 発見(田上氏), Parallelohedra のアフィン同値クラス分類と正多面体の折りたたみ(奈良氏)等に多くの進展が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 24 件)

- ① J. Itoh, K. Kiyohara, Cut Loci and conjugate loci on Liouville surfaces, manuscripta math., 査読有, (to appear)受理済.
- ② J. Itoh, C. Nara, Unfoldings of doubly covered polyhedra and applications to space-fillers, Periodica Math. Hungarica, 査読有, (to appear) 受理済.
- ③ K. Ieiri, J. Itoh & C. Vilcu, Quasigeodesics and farthest points on convex surfaces, Advances in Geometry, 査読有, (to appear) 受理済
- ④ K. Kiyohara, P. Topalov, On Liouville integrability of h-projectively equivalent Kaehler metrics, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 139 (2011). 231--242
- ⑤ J. Itoh, K. Kiyohara, The cut loci on ellipsoids and certain Liouville manifolds, Asian J. Math., 査読有, 14 (2010), 257-289
- ⑥ J. Itoh, J. O'Rourke, C. Vilcu, Star unfolding convex polyhedra via quasigeodesic loops. Discrete Comp. Geom., 査読有, 44 (2010), 35-54
- ⑦ J. Itoh, S. V. Sabau, H. Shimada, A Gauss-Bonnet type formula on Riemann-Finsler surfaces with nonconstant indicatrix volume. Kyoto J. Math., 査読有, 50 (2010), 165-195
- ⑧ J. Itoh, C. Nara, Reflective space-filling polyhedra. Int. J. Pure Appl. Math., 査読有, 58 (2010), 87-98
- ⑨ M. Igarashi, K. Kiyohara, On Hermite-Liouville manifolds, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 62 (2010) 895-933
- ⑩ J. Itoh, C. Vilcu, What do cylinder look like? J. Geom., 査読有, 95 (2009) 41-48
- ⑪ J. Itoh, C. Vilcu, Criteria for farthest points on convex surface. Math. Nachr., 査読有, 282 (2009), 1537-1547
- ⑫ J. Itoh, F. Ohtsuka, T. Zamfirescu, Some remarks on simple closed geodesics with ends. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 査読有, 52 (2009), 311-319
- ⑬ J. Itoh, L. Yuan, Acute triangulations of flat tori. European J. Combin., 査読有, 30 (2009), 1-4
- ⑭ K. Enomoto, J. Itoh, R. Sinclair, The total absolute curvature of open curves in E3. Illinois J. Math., 査読有, 52 (2008), 47-76
- ⑮ J. Itoh, J. Rouyer, C. Vilcu, Antipodal convex hypersurfaces. Indag. Math., 査読有, 19 (2008), 411-426
- ⑯ J. Itoh, H. Maehara, On triangulations of the surface of a cube into planar acute triangles. Ryukyu Math. J., 査読有, 21 (2008), 15--22.

[学会発表] (計 48 件)

- ① 伊藤仁一, Moderation on convex bodies, 日本数学会年会幾何学分会, 2011年3月22日, 早稲田大学
- ② 伊藤仁一, Moderation on convex bodies, 多様体上の種々の幾何構造とその応用 2011年3月9日, 名城大学
- ③ J. Itoh, Continuous flattening Platonic polyhedral The China-Japan joint conf. on Computation Geometry,

- Graphs and Applications, 2010年11月4日, Dalian Maritime Univ. (Dalian, China)
- ④ J. Itoh, The cut locus, the conjugate locus and related topics, Geometry seminar, 2010年9月22日, Stuttgart Univ. (Stuttgart, Germany)
- ⑤ J. Itoh, The cut locus and the related topics Geometry seminar, 2010年9月30日, Leipzig Univ. (Leipzig, Germany)
- ⑥ J. Itoh, Cut locus structures on graphs, Differential Geometry and its Applications, 2010年8月30日, Masaryk Univ. (Brno, Czech)
- ⑦ J. Itoh, The cut loci and the conjugate loci on n-dim. Ellipsoids, Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications (Delone 120), 2010年8月19日, Steklov Math. Inst. (Moscow, Russia)
- ⑧ J. Itoh, Cut locus structures on graphs, Combinatorics 2010, 2010年7月2日, Hotel Il Chioistro (Verbania, Italy)
- ⑨ 伊藤仁一, What do cylinders look like? 日本数学会年会幾何学分科会, 2010年3月26日, 慶応大学
- ⑩ 伊藤仁一, Several topics of intuitive geometry, 多様体上の種々の幾何構造とその応用, 2010年3月9日, 名城大学
- ⑪ 伊藤仁一, Some topics of intuitive geometry, 研究会「直観幾何学」2010年2月14日, 熊本大学
- ⑫ C. Nara, Minimal surface area of polyhedral unfoldings, Japan conf. on Comput. Geometry and Graphs, 2009年11月13日, Kanazawa Culture Hall
- ⑬ 大塚富美子, 曲面上の閉測地線の数について, 日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会, 2009年9月27日, 大阪大学
- ⑭ J. Itoh, The cut loci and conjugate loci on ellipsoids, 11th International Conference on Discrete Mathematics: Convexity and Discrete Geometry, 2009年7月27日, Dortmund Univ.
- ⑮ 伊藤仁一, 教育系修士課程の修士論文について--具体的指導の例示-- 日本数学会教育委員会主催教育シンポジウム, 2009年3月29日, 東京大学駒場キャンパス
- ⑯ 伊藤仁一, Acute triangulations of flat tori, 日本数学会年会幾何学分科会, 2009年3月27日, 東京大学駒場キャンパス
- ⑰ J. O' Rourke, Source Unfoldings of Convex Polyhedra with respect to Certain Closed Polygonal Curves, 25th European Workshop on Computational Geometry, 2009年3月16日, Brussels (Belgium)
- ⑱ J. O' Rourke, Unfolding convex polyhedra via quasigeodesic source & star unfoldings, Discrete Differential Geometry, 2009年1月16日, Oberwolfach (Germany)
- ⑲ 伊藤仁一, Thread construction of quadric (hyper) surfaces, 日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会, 2008年9月25日, 東京工業大学
- ⑳ 清原一吉, 楕円体のカットローカスと共役跡, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会, 2008年9月25日, 東京工業大学
- ㉑ J. Itoh, Thread construction of quadric (hyper) surfaces, Discrete & Convex Geometry Workshop, 2008年7月5日, Renyi Inst. of Math. Budapest (Hungary)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 仁一 (ITO H JIN-ICHI)
熊本大学・教育学部・教授
研究者番号: 20193493

(2) 研究分担者

清原 一吉 (KIYOHARA KAZUYOSHI)
岡山大学・理学部・教授
研究者番号: 80153245