

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540087

研究課題名(和文) 孤立特異点の境界幾何構造のモジュライの研究

研究課題名(英文) Research on the moduli of the geometric structure on a boundary of isolated singularities

研究代表者

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA KIMIO)

鹿児島大学・理工学研究科(理学系)・教授

研究者番号：40107850

研究成果の概要(和文)：複素解析空間の正規孤立特異点のモジュライの境界構造による記述に関して、以下の成果を得た。

- (1) 準斉次特異点の典型である $A_{n,q}$ 型有理曲面特異点に関して、その1次変形の不変球面調和形式による具体的記述を得た。
- (2) 正規孤立特異点の特異点解消空間について、その完備変形族の複素解析的構成を行った。
- (3) 複素3次元以上の正規孤立特異点の完備変形族構成に関して、固定した実接触構造上でのハミルトン流による境界CR構造の同一視という観点での枠組みを構成した。

研究成果の概要(英文)：The following three results are obtained about the boundary description on the moduli of normal isolated complex singularities:

- (1) Descriptions of the first order deformations of rational surface singularities $A_{n,q}$ are obtained using the invariant spherical harmonic forms.
- (2) The versal deformation of resolution of normal isolated singularities is complex analytically constructed.
- (3) A framework of constructing the versal deformation of CR structures with fixing a contact structures on a boundary of normal isolated singularities of complex dimension three or higher is established under the equivalence of CR structures connected by the Hamiltonian flows.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	0	0	0
2007年度	0	0	0
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：【数学】

科研費の分科・細目：【複素解析幾何】

キーワード：【複素解析幾何学，CR 構造，特異点，モジュライ，変形】

1. 研究開始当初の背景

特異点は広範囲の数学に現れる重要な対象であるが，特異点そのものを扱う理論構成と非特異部分の情報からアプローチする理論構成に大別される．解析学に基礎をおく分野，特に応用に関わる分野では後者のアプローチが重要である．しかし，先行する研究は，前者のアプローチ，すなわち特異点の定義方程式や特異点解消に基づく代数幾何的研究が中心であった．

後者のアプローチにおいては，複素解析空間の正規孤立特異点はその境界上の複素解析構造（CR 構造）によって定まること（F. Harvey-H. Lawson の定理）が知られており，それが複素解析空間の孤立特異点に対して境界構造からアプローチすることを可能にしている．

本研究の主題は，特異点を連続的に変化させることに係る事象を境界上の動きで捉えることである．一般的に連続的に変化させることを“変形”と呼び，連続的変化を表すパラメータを“モジュライ”と呼ぶが，本研究では，複素解析的パラメータのみを扱い，それらを“モジュライ”と呼び，それによる複素解析的変化を“変形”と呼ぶことにする．

本研究の研究代表者は論文 K. Miyajima, CR construction of deformations of normal isolated singularities, Journal of Algebraic Geometry, Vol.8 (1999) 403-470 において，正規孤立特異点の変形を（特異点の直接的な情報に頼らず）境界上の CR 構造の変形で統御する一般的なメカニズムを明らかにしていた．さらに，準斉次特異点に関しては，その代数構造の変形空間と境界 CR

構造の変形空間のそれぞれに，このメカニズムから生み出される自然な次数付けが存在することを示しており，特異点の変形と境界 CR 構造の変形の間にある深い関係を具体的に捉える方法があることを窺わせていた．

一方，代数幾何に基づく特異点の個別理論においては，種々の代数構造を反映した特異点のモジュライ理論が展開されているが，境界構造に基づくアプローチにおいては，一般論レベルの研究に留まっており，個別特異点に関する豊富な構造の研究が待たれている状況であった．

2. 研究の目的

上記のように，孤立特異点のモジュライを境界構造を通じて把握するという構想の下に，本研究では幾何構造を通じたモジュライ空間の記述を行うとともに，重要なクラスの特異点のモジュライの詳細な記述を行うことを目的とした．具体的には，次のような考察を対象とした．

(1) 準斉次特異点に働く C^* -作用は，その境界には S^1 -作用として働く．このことに基づいて，（重要なクラスの特異点である）準斉次特異点の境界には横断的対称性を持つ CR 構造があると考えられる．横断的対称性を持つ CR 構造の変形の観点から，準斉次特異点の変形へのアプローチを行う．

(2) 有理曲面特異点は準斉次特異点の代表的なものであり，種々の幾何学に現れてくる．その特異点解消空間の変形は，表現論・グラフ理論・ゲージ理論等との結びつきが知られている重要な対象である．その特異点解消空間の変形へ境界幾何構造の変形の視点から

のアプローチを行う。

(3)有理曲面特異点の特異点解消のモジュライ理論において、固定したシンプレクティック構造に付随するケーラー構造という視点は基本的であった。その境界版は、固定した接触構造に付随する CR 構造（または、擬エルミート構造）である。正規孤立特異点の変形への境界 CR 構造からのアプローチをこの視点の下に行う。

3. 研究の方法

次のような方法で研究を進めた。

(1)特異点を主題とする研究会で、新しい知見や新現象の発見などの最新の研究情報を得て、本研究の観点から検討を加えた。（日豪特異点シンポジウム、特異点と多様体草津 2008 研究会、葉層構造研究集会、京都大学数理解析研究所短期研究集会、など。）

(2)本研究の研究手法の改良のために、幾何学や複素解析学での研究手法の最新動向の情報を得た。（複素解析学葉山シンポジウム、幾何学シンポジウム、京都大学数理解析研究所共同研究集会、など。）

(3)研究分担者との討論とコンピュータによる実例計算によって考察を強化しながら新しい知見へと研究を進めた。

(4)研究の進展状況に関して、学会発表や専門家のレビューを通じて本研究への批判を受け、随時、本研究の見直しを行った。（日豪特異点シンポジウムや日本数学会等での発表、特異点の変形理論の権威である O. Riemenschneider 教授の招聘、など。）

4. 研究成果

次のような成果が得られた。

(1)「準斉次特異点 \leftrightarrow 横断的対称性を持つ境界 CR 構造」という対応に基づいて、正規孤立特異点の変形と境界 CR 構造の変形とを

統御する一般的なメカニズムを解析する事により、 $A_{n,q}$ 型有理曲面特異点の 1 次変形を球面調和形式の不変式によって具体的に記述した。これとクライン型曲面特異点に関する児玉充氏による未発表の記述を併せると、有理曲面特異点の境界 CR 構造の 1 次変形の具体的な記述が完結したことになり、高次変形の記述への端緒を開いたことになる。（ $A_{n,1}$ 型曲面特異点に関しては、研究代表者と J. Bland 教授（トロント大、カナダ）によって、高次変形の記述が得られている。）

(2)特異点解消空間の変形を境界構造によって捉えるためには、特異点解消空間そのものの変形を（境界構造と相性がよい）解析的記述によって捉える必要がある。本研究では、正規孤立特異点の特異点解消空間の完備変形空間を複素解析的に構成した。とくに、そこに現れる解析学上の困難を解決した。また、 $A_{n,q}$ 型曲面特異点の特異点解消空間の変形に対して、そのトーリック構造に基づく構成を境界 CR 構造の観点から分析した。この研究は、今後の課題へと継続した。

(3)境界上の実接触構造を固定した CR 構造の変形に対応するような CR 構造の同一視として CR ハミルトン流による同一視が赤堀隆夫教授（分担者）によって提唱され、それが完備変形族構成に有効であることが示された。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 19 件）

(1) K. Miyajima, CR deformations of cyclic quotient surface singularities, CMA Proceedings 43 巻 “The Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities JARCS III”（査読有）, 2010, 55-65.

(2) T. Akahori, The notion of CR Hamiltonian flows and the local embedding problem of CR structures, In “Emerging Topics on Differential Geometry and Graph Theory” (査読有), 2009, 79-94.

(3) K. Miyajima, Analytic construction of versal deformation of resolution of normal isolated singularities, J. Korean Math. Soc. (査読有), 46 巻, 2009, 125-150.

[学会発表] (計 13 件)

(1) S. Yokura, Natural transformations associated with additive homology classes, 共同研究集会「実閉体上の幾何と特異点論への応用」, 2010. 11. 30, 京都大学数理解析研究所.

(2) 赤堀隆夫, 孤立特異点の境界の contact structure, 日本数学会 2010 年会函数論分科会特別講演, 2010. 3. 25, 慶応義塾大学 (横浜市).

(3) K. Miyajima, Analytic construction of deformation of resolution of normal isolated singularities, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities Sydney 2009, 2009. 9. 17, シドニー大学 (オーストラリア).

(4) T. Akahori, On the notion of CR-Hamiltonian flows, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities Sydney 2009, 2009. 9. 16, シドニー大学 (オーストラリア).

(5) K. Obitsu, Asymptotic behaviors of metrics on the moduli of curves, Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XIII, 2009. 7. 21, 湘南国際村センター (神奈川県三浦郡葉山町).

[図書] (計 1 件)

(1) 宮嶋公夫 (翻訳), H. グラウエルト・R. レンメルト著「シュタイン空間論」, シュプリンガー東京, 2009, 342 ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA KIMIO)
鹿児島大学・理工学研究科 (理学系)
・教授

研究者番号 : 40107850

(2) 研究分担者

與倉 昭治 (YOKURA SHOJI)
鹿児島大学・理工学研究科 (理学系)
・教授

研究者番号 : 60182680

愛甲 正 (AIKOU TADASHI)

鹿児島大学・理工学研究科 (理学系)
・教授

研究者番号 : 00192831

小櫃 邦夫 (OBITSU KUNIO)

鹿児島大学・理工学研究科 (理学系)
・准教授

研究者番号 : 00325763

伊藤 稔 (ITOH MINORU)

鹿児島大学・理工学研究科 (理学系)
・准教授

研究者番号 : 60381141

赤堀 隆夫 (AKAHORI TAKAO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科
・教授

研究者番号 : 40117560

(3) 連携研究者

伊藤光弘 (ITOH MITSUHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科
・名誉教授

研究者番号 : 40015912