

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540091

研究課題名(和文) 葉層構造に対する Thurston の不等式に関する研究

研究課題名(英文) A research on Thurston's inequality for foliations

研究代表者

三好 重明 ( MIYOSHI SHIGEAKI )

中央大学 理工学部 教授

研究者番号：60166212

研究成果の概要(和文)：3次元多様体上の余次元1葉層構造で Thurston の不等式を満たすものとして知られていたのは Reeb 成分を持たないものであったが、近年の研究で Reeb 成分を持たないという条件は必要条件では無いことが知られてきていた。また、Thurston の不等式を満たさない葉層構造の実例も知られていなかった。本研究は回転可能葉層と呼ばれる葉層構造を精しく調べることにより、Reeb 成分を持つ葉層構造であって Thurston の不等式を満たすものの族を構成し、また Thurston の不等式を満たさない葉層構造の実例を構成した。

研究成果の概要(英文)：It was only known that Reebless foliations among codimension-one foliations on a 3-manifold satisfy Thurston's inequality. Also, according to the latest research the condition of Reebless is known not to be necessary for Thurston's inequality. Moreover, the example not satisfying Thurston's inequality had not been known. In this research, we studied spinnable foliations in detail and obtained a sufficient condition for spinnable foliations. Thus we constructed a family of spinnable foliations each of which satisfies Thurston's inequality and an example of the foliation not satisfying Thurston's inequality.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：葉層構造の位相幾何学的研究

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学，トポロジー，葉層構造，接触トポロジー

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の出発点は W. Thurston による結果である：Reeb 成分を持たない葉層構造の Euler 類の Thurston norm は 1 以下である (W. Thurston: Norm on the homology of 3-manifolds, Memoirs of the AMS, 1986).

この Thurston の不等式は、その形から明らかかなように例えば (co)homology が自明な多様体上の葉層構造に関してはそれが如何なるものでも常に満たされる。従って、それを満たさないような葉層構造は安易には構成し難く、Thurston の不等式を満たさない葉層構造の例は知られていなかった。また逆に、Reeb 成分を持つ葉層構造でも Thurston の不等式を満たす例が見出されて来ていた (A. Mori: A note on Thurston-Winkelnkemper's construction of contact forms on 3-manifolds, Osaka J. Math. 2002).

一方、3次元トポロジーに於いて、葉層構造論と接触トポロジーとの密接な関係が知られて来ており、Y. Eliashberg と W. Thurston によりそれらの統一的な研究が提唱されている (Y. Eliashberg and W. Thurston: Confoliations, A.M.S. University Lecture Series, 1998). 葉層構造は接触構造により近似でき、接触構造に於ける Thurston の不等式の同等物 (Thurston-Bennequin の不等式) に関しては、Y. Eliashberg その他により、かなりきれいな形で解明されている：接触構造が Thurston-Bennequin の不等式 (の相対版) を満たす為の必要十分条件は、それが tight であることである。さらに K. Honda その他により、接触構造に自然に対応する回転可能構造、或いは開本分解の monodromy の言葉 (right-veering) により tightness は特徴付けられている。しかしながら、これらの接触

トポロジーの結果をもってしてもなお、葉層構造論の立場からは究極的解明がなされたとは言い難く、葉層構造論の側からより目に見える形での解明が望まれていた。

## 2. 研究の目的

本研究の究極的目的は次の問題を解明することにある：

問題 3次元多様体上の余次元 1 葉層構造で Thurston の不等式を満たすものを特徴付けよ。

本研究では、Reeb 成分を持つ基本的な葉層構造である回転可能葉層に関して Thurston の不等式を満たす為の条件を与えることを一つの大きな目標としていた。事前の研究では或る程度の成果 (或る十分条件) が得られており、それらをまとめて形のあるものとし、さらにそれらの精密化を目標としていた。またそれらの条件を用いて、その時点まで知られていなかった Thurston の不等式を満たさない葉層構造の構成が期待された。

本研究の目的はこれら事前の研究を継続し、冒頭に挙げた問題の究極的解明へ向けての一つの里程碑と為すことにある。

## 3. 研究の方法

回転可能葉層はその monodromy 微分同相写像により (殆ど) 定まる。従って Thurston の不等式を満たす為に回転可能葉層の満たすべき条件はその monodromy によって表されるのが自然である。従って当初の計画としては monodromy を与えたとき、その定める 3次元多様体の実係数 2次元 cohomology 群の Thurston 単位多面体を記述することを考えた。その為に或る自動化 (アルゴリズムの設計と実装) を一つの方向として考察した。

また, Reeb 成分が唯一つの回転可能葉層 (即ち多様体内の繊維化結び目による回転可能葉層) について, その Reeb 成分を張り直すことにより新たな深度 1 の葉層構造が得られる. この改変操作を施すことによって Thurston の不等式を満たすかどうかのように変化するかを調べることを考察した.

Thurston の不等式には相対版があり, 対応する接触構造に関しては相対版の不等式が tight 性の必要十分条件を与える. また, 接触構造の場合には相対版の方が絶対版より強い (相対版が満たされれば絶対版が満たされる). しかし葉層構造の場合には接触構造とは異なり, この二つの不等式には明快な関係は無いことが知られているが, 回転可能葉層に限っては構造が単純である関係上, 簡明な結果が得られる見通しがあり, その方向で研究を行った.

#### 4. 研究成果

回転可能葉層に関しては, 以下に述べるように満足のいく結果が得られた. まず葉層の接束の Euler 類が自明である為の一つの十分条件を monodromy の言葉で与えた.

Euler 類が自明ならば Thurston の不等式 (の絶対版) は自明に満たされる. さらに Euler 類が無限位数を持つ為の十分条件も与え, それにより Thurston の不等式が満たされない回転可能葉層を構成した. このような例は今迄に知られていなかった.

Thurston の不等式相対版については接触構造の場合とは異なり, 必ずしも絶対版より強いとは言えないが, 回転可能葉層の場合に限れば相対版が成立すれば絶対版が成立することが証明できた. このような主張が成立する葉層構造のクラスの存在も今迄には知られていなかった.

さらに回転可能葉層で Reeb 成分が唯一のもの (即ち多様体内の繊維化結び目による

回転可能葉層) について Reeb 成分の貼り換え (Reeb 成分に沿った Dehn 手術) を行って得られる葉層構造を考えた. Dehn 手術によって Thurston norm が縮退する場合を或る状況で考察した Gabai, Sela の定理を用いて, 回転可能葉層であってその Reeb 成分に沿った Dehn 手術によって得られる葉層構造は殆ど (即ち有限個を除き) Thurston の不等式を満たすようなものを構成した. これは当初の印象とは異なり, Reeb 成分を持ちかつ Thurston の不等式を満たす葉層構造は少なくないということを意味している. これは驚くべきことであり, 今後の研究の大きな里程標となっていると言えるであろう.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

[1] Hiroki Kodama, Yoshihiko Mitsumatsu, Shigeaki Miyoshi and Atsuhide Mori, On Thurston's inequality for spinnable foliations, Proceedings of Paulfest, Contemporary Math., 査読有, Vol. 498, 2009, 173—193.

[2] Shigeaki Miyoshi and Atsuhide Mori, Reeb components and Thurston's inequality, Proceedings of Paulfest, Contemporary Math., 査読有, Vol. 498, 2009, 195—206.

[3] Yoshihiko Mitsumatsu, On Bennequin's isotopy lemma and Thurston's inequality, Differential Geometry, Proc. ICDG VIII 2008, 査読有, 2009, 56—64.

[4] Yoshihiko Mitsumatsu and Elmar Vogt, Foliations and compact leaves on 4-manifolds I: Realization and self-intersection of compact leaves, 'Groups of Diffeomorphisms', Advanced Studies in

Pure Math. 査読有, Vol. 52, 2008, 415—442.

[学会発表] (計 10 件)

[1] 三松 佳彦, Fermat 3 次曲面の symplectic 構造と 5 次元球面上の Poisson 構造, トポロジーの現在と未来, 2010 年 12 年 20 日, 文部科学省共済組合箱根宿泊所 四季の湯強羅静雲荘 (神奈川県足柄下郡)

[2] 三好 重明, A construction of a typical foliation on a 3-manifold, 葉層構造と微分同相群 2010, 2010 年 10 月 27 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

[3] 三松 佳彦, Leafwise symplectic structure of Lawson's foliation, 葉層構造と微分同相群 2010, 2010 年 10 月 26 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

[4] Yoshihiko Mitsumatsu, Modifications of 2-dimensional foliations on 4-manifolds and tautness, XVII Encontro Brasileiro de Topologia, August 3, 2010, PUC-Rio., Brazil.

[5] Yoshihiko Mitsumatsu, Turbulization of 2-dimensional foliations on 4-manifolds and tautness, Conference on Geometry and Topology of Foliations, July 13, 2010, CRM, Barcelona, Spain.

[6] Shigeaki Miyoshi, A construction of a typical foliation on a 3-manifold, Conference on Geometry and Topology of Foliations, July 12, 2010, CRM, Barcelona, Spain.

[7] Yoshihiko Mitsumatsu, Turbulization of 2-dimensional foliations on 4-manifolds and 3-dimensional Anosov flows, Workshop on Dynamics of Foliations, April 28, 2010, CRM, Barcelona, Spain.

[8] Yoshihiko Mitsumatsu, Prescribed compact leaves and closed transversals, Workshop on Geometry of Foliations, April 27, 2010, CRM, Barcelona, Spain.

[9] 三松 佳彦, 接触構造の pair の特異点の標準形について, 接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺, 2010 年 1 月 27 日, 洞爺湖文化センター.

[10] Yoshihiko Mitsumatsu, On Bennequin's isotopy lemma, VIII International Colloquium on Differential Geometry, July 8, 2008, Santiago de Compostela, Spain.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

三好 重明 (MIYOSHI, SHIGEAKI)  
中央大学理工学部・教授  
研究者番号 : 60166212

### (2) 研究分担者

三松 佳彦 (MITSUMATSU, YOSHIHIKO)  
中央大学理工学部・教授  
研究者番号 : 70190725