

機関番号：32644

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540092

研究課題名（和文） 絡み目不変量の計算位相幾何学的研究

研究課題名（英文） Link Invariant From The Computational Topological Viewpoint

研究代表者

原 正雄 (Hara Masao)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：10238165

研究成果の概要（和文）：結び目理論，絡み目理論において重要な不変用である多項式不変量をダイアグラムから計算するアルゴリズムについて研究を行った．問題の計算量解析と特殊なダイアグラムに対して多項式時間で計算するアルゴリズムを開発した．これまでに得られていた2-橋絡み目ダイアグラム，閉3-ブレイドダイアグラムの場合の手法を発展させて Montesinos ダイアグラムの場合にも多項式時間で多項式不変量を計算するアルゴリズムを開発した．

研究成果の概要（英文）：We researched into polynomial invariants of knots and links that play an important role in the knot theory. We analyzed the complexity of determining the link polynomials from link diagrams. We designed polynomial time algorithms that compute link polynomials from certain link diagrams. We developed our algorithms that compute link polynomials from 2-bridge or closed 3-braid diagrams into a polynomial time algorithms that compute link polynomials from Montesinos diagrams.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：絡み目理論，計算位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：計算位相幾何，絡み目不変量

1. 研究開始当初の背景

(1) Haken や Schubert により，3次元球面内の結び目の自明性判定問題や種数判定問題は計算可能であることが示された．Hass-Lagarias-Pippenger は Haken らのアルゴリズムの計算量解析を行い，球面内の結び目の自明性判定問題が NP に，球面内の結び目の種数判定問題が PSPACE に含まれることを示した．彼らは結び目の自明性判定問題は $NP \cap co-NP$ に含まれるだろうと予想（以下 HLP の予想）している．さらに Agol-Hass

-Thurston は3次元多様体内の結び目の種数判定問題が NP-完全であることを証明した．

(2) Jones が絡み目の新しい多項式不変量を定義して以来，Homfly 多項式，Kauffman 多項式などいくつかの多項式不変量が定義されたが，これらの多項式不変量の幾何学的特徴づけることは未だに出来ていない．

一方，Welsh らによってこれらの多項式不変量はいずれも #P-困難であることが示されている．したがって，すべての絡み目につい

て多項式不変量を多項式時間で求めることは不可能だと予想される。 Mighton や Makowsky らにより入力する絡み目ダイアグラムを制限すると多項式不変量を多項式時間で計算できることが示されている。本研究代表者と分担者の谷，山本も 2-橋絡み目や 3-閉ブレイド絡み目ダイアグラムから Jones 多項式を高速に計算するアルゴリズムを考案している。

2. 研究の目的

(1) HLP の予想の解決に向けて関連するアルゴリズムの計算量解析を行う。3次元多様体内の結び目の種数判定問題は NP-完全であり、この問題は 3次元球面内の結び目の自明性判定問題を含んでいる。したがって、HLP の予想が正しいとすると両者の間には計算量の差があると期待される。

また、グラフの同値性判定問題も $NP \cap co-NP$ に含まれると予想されている。グラフを 1次元複体とみなすとき結び目（1次元閉多様体）と同様の埋め込みの問題が考えられる。本研究では 3次元多様体内のグラフの位相的性質の研究と、それらの問題の計算量解析とも行う。

(2) 本研究では多項式不変量の幾何学的特徴付けの難しさと、計算の困難さの関係を探ることを目標とする。多項式不変量の計算の難しさがどのような幾何学的性質に起因しているかを研究し、絡み目の複雑さを表す新しい指標となる不変量の定義を目指す。多項式不変量が簡単に(多項式時間で)計算できるような絡み目とその計算アルゴリズムの研究や多項式不変量の次数や係数を計算する問題の計算量解析を行う。

本研究代表者と分担者の谷，山本も 2-橋絡み目や 3-閉ブレイド絡み目ダイアグラムから Jones 多項式を高速に計算するアルゴリズムを考案している。本研究ではこれまでの研究に引き続き絡み目ダイアグラムを制限した場合の多項式不変量計算アルゴリズムの研究を行う。これまでのアルゴリズムを改良，一般化し，より多くのダイアグラムについて多項式不変量を高速に計算するアルゴリズムの研究をする。また，多項式不変量全体ではなく次数や特定の係数だけを求める問題の計算量解析も行う。

3. 研究の方法

本研究は結び目理論の問題を計算機科学的視点から研究しようというものであり，位相幾何学と計算機科学の境界領域に属する研究である。本研究には位相幾何学と計算機科学の両分野の最新の研究成果を取り入れる必要がある。そのために，研究組織には位相幾何学の研究者と計算機科学の研究者の両方をバランスよく配置するよう工夫した。

(1) 位相幾何学における判定問題の計算

理論的研究

このテーマは位相幾何学における判定問題の計算量解析を行うものである。結び目の種数判定問題と自明性判定問題については Hass-Lagarias-Pippenger と Agol-Hass-Thurston の研究で大きく進展した。

① 本研究では多様体内の結び目の自明性判定問題や球面内の結び目の種数決定問題の NP-完全性について考察する。球面内の結び目の自明性判定問題は NP-完全性ではないと強く予想できるのでこれらの問題の完全性は P と NP の差を調べる上でも興味深い。

② 平面的空間グラフや絡み目の自明性判定問題や絡み目の種数判定問題についてその計算量解析を行う。これらについては上記の Hass たちの研究手法と最近の 3次元多様体の研究手法をこの分野に応用する方法を研究する。

(2) 絡み目不変量の計算量解析

このテーマは絡み目ダイアグラムから多項式不変量の計算する問題の計算量解析と実際の計算アルゴリズムの研究及び実装を行う。すべての絡み目ダイアグラムを入力として許す一般的なアルゴリズムについては #P-困難であることがすでに示されているので，入力あるいは出力に制限を加えて計算量解析を行い，得られた性質が絡み目のどのような幾何学的性質に由来しているかを考察する。

① 入力するダイアグラムをある種の幾何学的性質を反映したクラスに限定し，その多項式不変量の計算の計算量解析を行う。

② 入力するダイアグラムをある種の幾何学的性質を反映したクラスに限定し，その多項式不変量の計算アルゴリズムの研究および実装を行う。

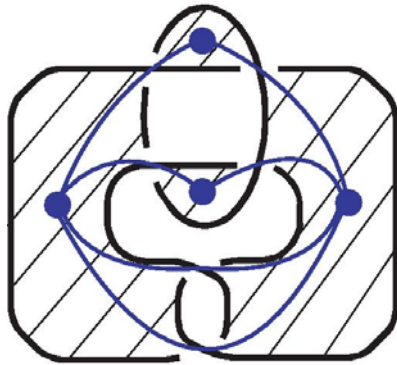
③ 多項式不変量の特殊値や次数，特定の係数を計算するアルゴリズムの考察および計算量解析を行う。

4. 研究成果

絡み目ダイアグラムから Jones 多項式などの絡み目多項式を求める計算の計算量は #P-困難であることが示されている。一方，入力する絡み目ダイアグラムに適当な制限を加えると絡み目多項式を多項式時間で計算できることが知られている。

絡み目ダイアグラムの交点を次数 4 の頂点とみなすとダイアグラムは 4-正則平面グラフに思える。このグラフで分けられる平面の領域は辺を共有する領域が同じ色にならないように 2色（白と影）で塗り分けることができる。この彩色の影の領域に頂点を置きダイアグラムの交点で隣接する領域にある頂点どうしを辺で結ぶと平面グラフが得られる。このグラフをダイアグラムの Tait グラ

フという。下図では6頂点のダイアグラムが黒い線であらわされていて、影の領域が斜線であらわされている。このとき青いグラフが Tait グラフである。ダイアグラムの頂点の個数と Tait グラフの辺の本数は等しく、Tait グラフは平面グラフなので入力を Tait グラフとしても入力のサイズは変わらない。したがって、以下入力は Tait グラフとし、そのサイズを n とする。



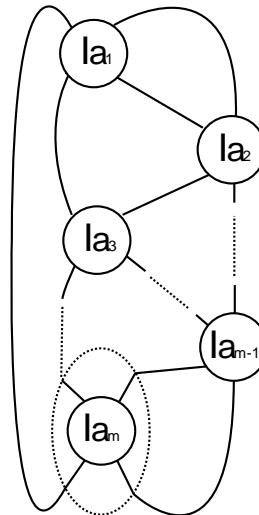
Tait グラフ

Mighton は Tait グラフの木幅が高々 2 以下のとき多項式不変量は $O(n^2 \log n)$ 時間で計算出来ることを示した。さらに、Makowsky は木幅が定数のとき多項式不変量は多項式時間で計算できることを示した。その他にも Utsumi-Imai によるプレツェルダイアグラムに関するアルゴリズム、Diao-Ernst-Ziegler らによる nested closed tangle diagram に関する研究などがある。その中でも Morton-Short による閉ブレイドに関する研究が興味深い。

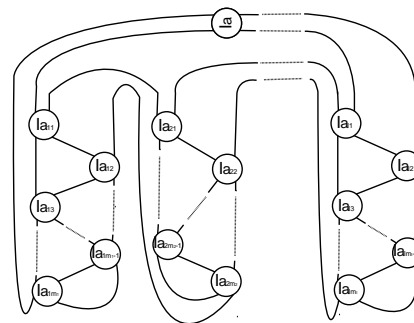
本研究の研究者たちによる研究では、多項式不変量の幾何学的性質に関するものとして、Jones 多項式の簡約次数と絡み目の交点数の差はいくらでも大きくなることを示した(原-谷-山本)。これはヒューリスティックに多項式不変量の次数を求めるアルゴリズムを実装し、プレツェルダイアグラムに関して実験を行うことに予測し、これを証明する手法を用いた。

アルゴリズムに関するものでは、Tait グラフが 1 頂点を除くと木になるもの(樹木状ダイアグラム)については多項式時間で計算できることを示したほか(原-谷-山本)、Tait グラフが 1 頂点を除くと道になるようなもの(2-橋ダイアグラム, 下図)と 3-閉ブレイドダイアグラムに対しては $O(n^2 \log n)$ 時間で多項式不変量を計算できることを示した(原-村上-谷-山本)。本研究では Tait グラフが 1 頂点を除くと次数が 3 以上の頂点が高々 1

つの木になるようなもの (Montesinos ダイアグラム, 下図) に関して $O(n^2 \log n)$ 時間で多項式不変量を計算できることを示した(原-村上-谷-山本)。特に、この研究には Tait グラフが Montesinos 型であることを認識するアルゴリズムを含んでいるが、このアルゴリズムは他にも応用が期待できる興味深いものである。さらに、2-橋ダイアグラムについて上記研究を発展させ、 $O(n^2 \log n)$ 時間で多項式不変量を計算できることを示した(村上-谷-竹下)。



2-橋結び目



Montesinos ダイアグラム

ただし、丸は整数タングル

また、山本を中心に、これまで得られたアルゴリズムを実装し、多くのダイアグラムに関して計算実験を行った。今後の弧の計算をすすめ計算結果をデータベース化して利用することを予定している。今後の研究では Jones 多項式の性質について新しい知見がデータベースを利用して得られるものと期待している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① Masao Hara, Masahiko Murakami, Seiichi Tani, Makoto Yamamoto, *Fast Algorithms for Computing Jones Polynomials of Montesinos Links*, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, Vol. 69, No. 1, 2009, pp.1-26
- ② Satoshi Matsumoto, Yusuke Suzuki, Takayoshi Shoudai, Tetsuhiro Miyahara, Tomoyuki Uchida, *Learning of Finite Unions of Tree Patterns with Repeated Internal Structured Variables from Queries*, *IPSJ Transactions on Mathematical Modeling and Its Applications*, 査読有, Vol. 2, No. 3, 2009, pp.127-137
- ③ Masao Hara, Junzo Watanabe, *The determinants of certain matrices arising from the Boolean lattice*, *Discrete Mathematics*, 査読有, Vol. 308, 2008, pp.5815-5822
- ④ Hiroataka Kato, Satoshi Matsumoto, Tetsuhiro Miyahara, *Learning of Elementary Formal Systems with Two Clauses Using Queries*, *IEICE Transactions on Information and Systems*, 査読有, Vol. E92-D, No. 2, 2009, pp.172-180

[学会発表] (計8件)

- ① 竹下文雄, 谷 聖一, 村上 雅彦, 2橋絡み目の HOMFLY 多項式を計算する高速なアルゴリズム, コンピューテーション研究会, 東京工業大学, 2010年6月25日
- ② 松本 哲志, 鈴木祐介, 正代隆義, 宮原哲浩, 内田智之, Learning of Finite Unions of Tree Patterns with Repeated Internal Structured Variables from Queries, 第73回 MPS 研究会, 沖縄県恩納村 OIST Seaside House, 情報処理学会, 2009年3月5日
- ③ 村上 雅彦, 原 正雄, 谷 聖一, 山本 慎, $O(n^2)$ time algorithms for computing Jones polynomials of certain links, 研究集会「結び目の数学 II」日本数学会トポロジー分科会・トポロジープロジェクト, 早稲田大学, 2009年12月23日
- ④ Masahiko Murakami, Masao Hara, Seiichi Tani, Makoto Yamamoto, *Polynomial time algorithms for computing Jones polynomials of certain links*, The 20th Workshop on

Topological Graph Theory, Yokohama National University, 2008年11月26日

- ⑤ 大西 建輔, 星 守, 凸多角形に対する包含多角形列の計算, アルゴリズム研究会, 情報処理学会, 大阪大学, 2008年11月7日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

原 正雄 (Hara Masao)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号: 10238165

(2) 研究分担者

松本 哲志 (Matsumoto Satoshi)
東海大学 /理学部 /准教授
研究者番号: 30307235
谷 聖一 (Tani Seiichi)
日本大学・文理学部・教授
科研費研究者番号: 70266708
山本 慎 (Yamamoto Makoto)
中央大学・理工学部・教授
科研費研究者番号: 10158305
大西 建輔 (Onishi Kensuke)
東海大学・理学部・講師
科研費研究者番号: 00303024
(H20→H21)