様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月３１日現在

機関番号：３２６４４
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８～２０１０
課題番号：２０５４００９３
研究課題名（和文）Minimal Chart の分類

研究課題名（英文）A Classification of Minimal Charts

研究代表者
志摩　亜希子（SHIMA　AKIKO）
東海大学・理学部・准教授
研究者番号：５０３１７７６５

研究成果の概要（和文）：chart とは円板内の向き付き、ラベル付きグラフで、４次元空間内の曲面結び目(埋め込まれた曲面)を表示するものです。これはとても画期的な方法です。crossing が高々３個の chart の分類について研究しました。主な結果は、crossing が高々３個の minimal chart は ribbon chart か 2-twist spun trefoil を表す chart に hoop や free edge を追加したものであることを示しました。つまり、ribbon を法とすると、crossing が高々３個の minimal chart は 2-twist spun trefoil を表す chart であることを示しました。

研究成果の概要（英文）：A chart is an oriented labeled graph on a disk which represents a surface link, i.e. an embedded surface in the 4-dimensional space. This is a remarkable method. We research about a classification of charts with at most three crossings. The main result is as follows: Any minimal chart with at most three crossing is either a ribbon chart, or a disjoint union of a chart representing a 2-twist spun trefoil, hoops and free edges. That is, any minimal chart with at most three crossing is a chart representing a 2-twist spun trefoil modulo ribbon charts.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	700,000	210,000	910,000
２００９年度	700,000	210,000	910,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何

１．研究開始当初の背景

(1) chart とは円板内の向き付き、ラベル付きグラフで、４次元空間内の曲面結び目(埋め込まれた曲面)を表示する画期的な方法である。この表示は Kamada 氏が提唱した。曲面結び目の ambient isotopy class を変えない chart の変形 (C-move) も Kamada 氏により研究されている。これらのことより、曲面結び目を研究するにはこの chart 表示はとても有効な手法である。

この chart は black vertex と言う次数１の頂点と crossing と言う次数４の頂点と white vertex と言う次数６の頂点と、ラベル付けられた辺からなるグラフである。n-chart というとそれらのラベルは１から n－1 までのいずれかである。それぞれ chart

の次数１の頂点、次数４の頂点、次数６の頂点はその chart が表す４次元空間内の曲面の branch point、double curve の交わり、３重点に対応する。

Kamada 氏が、ラベルが 1,2 のみからなる 3-chart は ribbon chart であることを示した。ここで ribbon chart とは C-move で white vertex を含まない chart に変形出来るものである。Nagase 氏と Shima により、4-chart で２つの crossing を含み、その chart が表す曲面結び目が球面ならば、それは ribbon surface であることが示された。Ribbon surface とはある ribbon chart が表す４次元空間内の曲面のことである。

ここまでの研究はラベルに条件がある結果である。私たちはラベルに条件がなく、n-chart が高々１つの crossing を含むならば、それは ribbon surface であることを示した。更に、minimal n-chart が２つの crossing を含むならば、black vertex の数が 4n－10 個であることを示した。この結果より、n-chart が２つの crossing を含み、その chart が表す曲面結び目が球面ならば、それは ribbon surface であることが示された。

これらの結果は crossing の数に関する結果で、crossing の数が２以下の球面を表す chart は、簡単な chart、つまり ribbon chart しかないという結果である。

(2) white vertex の数に注目した結果もある。white vertex の数が１か２か３ならば ribbon chart であることは簡単に分かる。Ishida 氏, Nagase 氏, Shima によって white vertex の数が４つの場合を調べた。これについては２種類のものが出てくることが示せた。その内の一種類は ribbon surface を表わす chart であることが示されている。この証明は C-move 以外に chart の変形で stabilization とその逆の変形、conjugation を使う。これらの変形は chart のラベルを増やしたり減らしたりするかもしれないが、つまり n-chart を (n+1)-chart にしたりするかもしれないが、それらに対応する４次元空間内の曲面を変えない変形である。white vertex の数が４つの場合について、残りの１種類の一部が ribbon chart ではないが、ribbon surface を表す chart であることが長谷川氏によって示されている。しかし、完全な分類にはいたっていない。

Ochiai 氏, Nagase 氏, Shima によって、white vertex の数が５つの minimal chart は存在しないことが示された。Nemoto 氏, Nagase 氏, Shima によって、white vertex の数が６つの (2,2,2)型の minimal chart も存在しないことが示された。長谷川氏によって、2-twist spun trefoil の white vertex の最小数が６つであることを示した。しかし、white vertex の数が６つ chart についてはまだすべての場合が調べられていない。Nagase 氏と Shima によって、white vertex の数が７つの minimal chart は存在しないことが示された。

２．研究の目的

本研究は minimal chart の分類をすることが目標であった。主に次の３つについて調べることが目的であった。

(1) minimal n-chart で３つの crossing を含むものについて調べる。

(2) white vertex の数が４つや６つの chart の内 ribbon chart でないものの決定する。

(3) white vertex の数が９個の chart について調べる。

(2) と (3) については、chart のテーブルを作ることも目的としてある。３次元空間内の結び目は交差点の数に関してテーブルが作られていて、豊富な例があり、結び目を研究する際の重要な役割を果たしている。曲面結び目についてもテーブルを作ろうとしているが、結び目のテーブルのようなものはない。曲面結び目の研究を活発にするために、chart のテーブルを作ることは有意義な目的である。white vertex の数に関して chart のテーブルを作っていきたい。

(3) については、奇数個の white vertex をもつ minimal chart があるのだろうかという素朴な問題を考える目的もある。向きのついた４次元空間内の曲面に対して、最小３重点の個数が奇数個であるような曲面の存在はまだ知られていない。 white vertex が３重点に対応しているので、これらの素朴な疑問に答えるきっかけになるかもしれない。

目的 (1), (2), (3)を研究することにより、豊富な chart の例が発見することによって、曲面結び目の不変量の研究や chart 変形を使った多様体の研究にも貢献することが出来ればいいとも思っている。

３．研究の方法

(1) chart Γ と円板 D とすると、組 $(D\cap\Gamma, D)$ である tangle について調べる。tangle $(D\cap\Gamma,\ D)$ が以下の２つの条件を満たすとき、ラベル m の NS-tangle であるいう。

①もしラベル i がラベル m と等しくないならば ∂D は高々1本のラベル i の edge と交わる。

② D は少なくとも１つの white vertex を含み、高々１つの crossing を含む。

重要な性質として、

『k-minimal chart 内には NS-tangle は存在しない』

ことを示した。この結果は以前私たちが示した『n-chart で高々１つの crossing を含むならば、それは ribbon surface である』ことの拡張にもなっている。この性質を使って、３つの crossing を含む chart はどのような形であるか調べる。

(2) tangle (D∩Γ, D) に対して、α を D 内の一番小さなラベルし、β を D 内の一番大きなラベルとする。
『このとき、D 内に crossing を含まないならば、D 内の edge のラベルを i とすると、$\alpha \leqq i \leqq \beta$ を満たす。』
この性質を用いて、更に３つの crossing を含む chart はどのような形であるか調べる。

(3) ３つの crossing を含む chart で表れるであろうと思われる、次の２種類の tangle について調べる。
① 円板 D の境界と交わる edge のラベルが高々２つを除いて一種類であり、円板 D が crossing を含まない tangle、
② 円板 D の境界と交わる edge のラベルが一種類であり、円板 D が高々２つの crossing を含む tangle である。
他の tangle も更に必要になってくるかもしれない。

(4) Γ を k-minimal chart とする。Γm を chart Γ のラベル m の edge とその頂点からなる部分グラフとする。 G を Γm の small component とする。
『もし G がある円板 D に含まれ、その円板が crossing を含むならば、 G は少なくとも２つの black vertex を含む』
という性質が示されている。

(5) (4) の性質を使って、３つの crossing を含む chart は少なくとも何個の black vertex が必要か調べる。そして、３つの crossing を含む chart はどのような形であるか調べる。

(6) minimal chart に対して、lens と呼ばれるある性質を満たす円板の内部にも外部にも少なくとも３つの white vertex が含まれることが示されている。この形はよく表れる形であり、white vertex の数が少ない chart には表れず、white vertex の数が８個以上含む chart に初めて表れる。

(7) 円板で、その境界が同じラベルの edge が k 本からなる円板を k-angled disk という。minimal chart の 2-angled disk と 3-angled disk について、 white vertex がその内部に高々１個以下ならばどのような形であるか調べている。

(8) (6) や (7) を使って、 white vertex の数が６個や９個の chart は minimal chart の性質を用いると無限の形があるもののかなりの部分が有限の形を調べればいいことが分かる。どのような形しかないのか調べる。

(9) (5) や (8) で表れる chart に対して、発見された不変量を計算し、分類を行う。

４．研究成果
(1) Γ を k-minimal chart とする。non-linear tangle (D∩Γ,D) に対し、 D∩Γ がラベル m の edge とラベル m+1 の edge からなるとする。このとき、
『∂D∩Γが丁度２本のラベル m の edge と交わるならば、D∩Γはラベル m の black vertex を２個以上含む』
ことを示した。また、
『∂D∩Γが丁度３本のラベル m の edge と交わるならば、D∩Γはラベル m の black vertex を１個以上含む』
ことを示した。

(2) Γ を高々３つの crossing を含む k-minimal chart とする。このとき、Γ は ring や hoop を含まないことを示した。ここで、hoop とは Γ の頂点の含まない closed edge のことであり、ring は同じラベルの edge からなる単純閉曲線で、white vertex を含まないものである。
　Γi を chart Γ のラベル i の edge とその頂点からなる部分グラフとする。α を Γ の edge のラベルの内、一番小さいもの、β をΓ の edge のラベルの内、一番大きいものとする。研究の手法(1)と(2) を使って、
『Γ が丁度３つの crossing を含む k-minimal chart であるならば、Γα とΓβ は少なくとも２個の crossing を含むこと』を示した。
　また、Γα やΓβ は cut edge を含まないことも示した。この結果を用いるとΓα∪Γβ の形が大体どのようであるか分かる。

(3) c(Γi) を Γi に含まれる crossing の数とする。Γ を丁度３つの crossing を含む k-minimal chart とすると、結果 (2) より、(c(Γα), c(Γβ)) は (2,2) か (2, 3) か (3, 2) か (3, 3) であることが分かる。各々の場合に対して、研究の方法 (4)を用いると chart 内に少なくとも何個の black vertex が必要か調べることが出来、
『minimal generalized n-chart が丁度３つ crossing を含み、n が５以上ならば、black vertex の数が 2n 個以上である』
ことを示した。

(4) 丁度３つの crossing を含む chart の例として、2-twist spun knot と呼ばれる曲面を表す chart G がある。この chart は ribbon chart でないものである。研究結果(1)、(2)、(3) を用い、更に詳しく調べることによって、crossing が高々３つである chart について次のことが得られた。
『crossing が高々３つである chart に対して、その対応する曲面が球面ならば、その chart は G と free edge と hoop の互いに交わらない和集合である』
ここで、free edge とは両端点が black vertex である edge のことであり、hoop は vertex のない closed edge のことである。
ribbon chart は free edge と hoop の互いに交わらない和集合である chart に C-move 同値であるので、この結論は、ribbon chart を法とすると、crossing が３つである chart は 2-twist spun knot と呼ばれる曲面を表す chart であることが示された。
これらを調べるために、tangle と呼ばれるものの性質が色々明らかになった。

(5) (4) で得られた結論を種数が１つ大きいトーラスに拡張できた。つまり、
『crossing が高々３つである chart に対して、その対応する曲面の種数が１以下の曲面ならば、その chart は G と ribbon chart の disjoint union である』
ことを示した。

(6) chart Γ が 型 $(m;n_1,n_2,\cdot\cdot\cdot,n_s)$ であるとは次の３つの条件を満たすときをいいます: (i) 各 i=1,2,・・・, s に対して, chart Γ は in Γm+i－1∩ Γm+i 内に丁度 n_i 個のwhite vertices を含む. (ii) i<0 か i>s ならば, w(Γm+i)=0 である. (iii) w(Γm) >0 と w(Γm+s)>0 を満たす。ここで、Γi はchart Γのラベル i の edge とvertex からなる部分グラフとする。w(Γi) はΓi に含まれる white vertex の数とする。white vertex の数が６個のものは (2,2,2) 型、(2,4) 型、(3,3) 型、(6) 型のいずれかである。(2,2,2) 型の chart はwhite vertex が減らすことが出来ると示されている。今回の結果は次のことを示した。研究手法 (6)と (7) がとても有効に用いられ、証明された。
『(3,3) 型の chart はwhite vertex が減らすことが出来る』
これにより、white vertex の数が７個以下である chart のテーブルを作成するにあたって、(2,4) 型と (6) 型である chart を調べる部分が今後の課題として残された。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

①Teruo Nagase, Akiko Shima, Properties of minimal charts and their applications II, Hiroshima Mathematical Journal, 査読有, 39, 2009, 1－35
② Teruo Nagase, Akiko Shima, Any chart with at most one crossing is a ribbon chart, Topology and its Applications, 査読有, 157, 2010, 1703－1720
③ Teruo Nagase, Akiko Shima, On charts with two crossings I:There exist no NS-tangles in a minimal chart, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 査読有, 17, 2010, 217-241
④Teruo Nagase, Akiko Shima, Properties of Minimal Charts and Their Applications III, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, 13, 2010, 373－392
⑤ Teruo Nagase, Nemoto Daisuke, Akiko Shima, There no exists minimal charts of type (2,2,2), Proceedings of the School of Science, 査読有, 46, 2011, 1－31
⑥ Satoru Ishida, Teruo Nagase, and Akiko Shima, Minimal n-charts with four white vertices, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, in press

〔学会発表〕（計３件）

①Teruo Nagase and Akiko Shima, On charts with three crossings, ４次元のトポロジー, 2009年1月28日, 広島大学
②Teruo Nagase and Akiko Shima, On the crossings in minimal charts, International Conference on Analysis and Applications, 2010 年 1 月 25 日, Sultan Qaboos University,
③Teruo Nagase and Akiko Shima, Crossing を３つ含む chart について, 日本数学会 2010年度年会, 2010年3月26日, 慶應義塾大学

６．研究組織
(1)研究代表者

志摩　亜希子（SHIMA　AKIKO）
東海大学・理学部・准教授
研究者番号：５０３１７７６５

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし