様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月１日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008～2012
課題番号：２０５４００９６
研究課題名（和文）　葉層構造と離散群作用の研究

研究課題名（英文）　Study of foliations and discrete group actions

研究代表者
松元　重則（MATSUMOTO SHIGENORI）
日本大学・理工学部・教授
研究者番号：80060143

研究成果の概要（和文）：平面上の同相写像のコンパクト極小集合Ｘは一点でなく連結のとき、補集合の不変成分はちょうどふたつであることを示した。また、このとき、Ｘの任意の測度についての回転数はただひとつであることを示した。コンパクト多様体上の葉層構造と葉に沿うリーマン計量が与えられたとき、調和測度が定まるが、各葉が双曲的な場合、エルゴード的な調和測度には、2 分割が存在することを証明した。また、平面上の Reeb 葉層に沿う流れのうち、標準的と呼ばれるものがあるが、これをその性質により特徴づけた。

研究成果の概要（英文）：Assume that a homeomorphism of the plane admits a compact minimal set which is connected and not a point. We showed that there are exactly two invariant connected components of the complement. We also showed that the rotation number is uniquely determined. Given a foliation on a compact manifold and a leafwise Riemannian metric, there is defined a harmonic measure of the manifold. In case the metric is hyperbolic and the harmonic measure is ergodic, we showed that there is a dichotomy of the measures. Among flows along the Reeb foliation of the plane, there is one which is called standard. We characterized it by its dynamical property.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
２０１２年度	500,000	150,000	650,000
総　計	2,600,000	780,000	3.380.000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：葉層構造、群作用

１．研究開始当初の背景

(1) 平面上の同相写像の非自明な連結極小集合の例は数多く知られていたが、それらすべてにおいて、補集合の不変な連結集合はちょうどふたつであった。
(2) 葉が 2 次元で、双曲的の場合、調和測度は、葉層接束上の測度で、あるリー群作用で不変なものと、1 対 1 に対応していることが知られていた。
(3) Reeb 葉層に沿う流れは、関数の類による分類がなされていた。その中で標準的な流れは、際立った関数と対応しており、力学系的にも、ひときわよい性質を持つであろうと考えられた。

２．研究の目的
(1) 上記背景(1)のもと、あらゆる同相写像について、補集合の不変な連結集合はちょうどふたつであろうという予想を立て、それを証明することを目的とした。
(2) 上記背景(2)のもと、葉が 3 次元以上であっても、やはり同等の関係が成り立つことを証明することを目的とした。
(3) 上記背景(3)のもと、標準的流れは、一定の定数倍の時間変化を施した流れと常に位相共役であるが、逆にこの性質を持つものは、標準的なものに限られるのではないかと考え、それを示すことを目的とした。

３．研究の方法
(1) 極小集合のカラテオドリ・コンパクト化に注目して、それを調べることにより、同相写像で不変な１対１に埋め込まれた曲線を構成することを考えた。
(2) 葉層の調和測度は、葉に沿うブラウン運動と密接な関係がある。このブラウン運動の、時間を逆にした運動を、解明することがかぎになるであろうと考えた。
(3) 関数論においては、正則関数は、その固定点における微分が絶対値１でない限り、1 次関数と共役であることが知られている。これと同じ論法を応用しようと考えた。

４．研究成果
(1) ｆを平面上の向きを保つ同相写像で、1 点集合でない連結でコンパクトな極小集合Ｘを持つものとする。このようなｆは数多く知られている。Ｘが円周となる例はすぐに構成できるが、そのほかにＸが擬円周（pseudo circle）となるもの、あるいは、ワルシャワ円周（Warsaw circle）となるものなどが知られている。Fayad-Katok による、共役速近似法（method of fast approximation by conjugations）を用いれば、おそらく、位相的に異なるものを限りなく構成することができるであろう。ところが、これらすべての例において、Ｘの補集合はふたつの成分から成り立っている。従って、同様のことが、一般的に成り立つであろうと予想するのは、自然である。ところが上記、擬円周の場合、ひとつの軌道（加算個の点からなっている）の点を円板に変えるという操作が可能であり、このときこれら円板はみな新しい極小集合Ｘの補集合に含まれる。 従って、上記予想は、このままでは成り立たない。
　そこで、同相写像ｆの極小集合Ｘの補集合Ｕを分類しよう。ｆ（Ｕ）＝Ｕ　が成り立つとき、Ｕを不変成分と呼び、ある数 n に対し　ｆ＾n（Ｕ）＝Ｕ が成り立つとき、周期的成分とよぼう。また周期的でない成分、すなわち、ｆを繰り返し施したとき、元に戻れない成分のことを遊走的と呼ぼう。このとき、中山裕道氏との共同研究において、次が成り立つことがわかった。また、この結果は論文③として、出版された。

定理　平面の向きを保つ同相写像ｆの１点でない連結コンパクト極小集合Ｘはその補集合のなかに、不変成分をちょうどふたつ持ち、他の成分は（あれば）みな遊走的である。

(2) Ｍをコンパクト多様体とし、その上の葉層構造Ｆを考える。Ｆの各葉には、リーマン計量ｇを与えておく。このとき、葉の上のブラウン運動に関連して、Ｍ上に調和測度というものを考えることができる。横断的に不変な測度がないときでも、調和測度ｍはつねに存在する。そして、ｍ-ほとんどの葉のホロノミー被覆の上に、「特性関数」という正値関数が、定数倍を除いて定まる。これは、計量ｇについて、調和的な関数である。
　以下、各葉のうえで、ｇは双曲的であるとする。また、調和測度ｍはエルゴード的とする。（これも必ず存在する。）　さらに、葉層構造Ｆは横断的に不変な測度を持たないと仮定する。（最後の仮定は、特殊な葉層構造を除くと満たされている一般的な仮定である。）
　このとき、ブラウン運動の逆運動を考えることにより、次の結果を得た。（参考文献⑧）

定理１　特性関数は非有界である。

さて、各葉の普遍被覆にもちあげた特性関数は、普遍被覆の無限遠球面上の確率測度により、定まる。

定理２　上記の無限遠球面上の確率測度はルベーグ測度について、特異的である。

定理３　上記の確率測度は、ほとんどすべての葉に対し、一点測度になるか、そうでなければ、ほとんどすべての葉に対し、その台は無限遠球面全体である。

(3) 平面上に２本の平行な直線を考え、それぞれに、反対の向きを与えておく。２本の直線に囲まれた閉領域Ｄの上に、次の２つの性質 a),b) を満たす、向きつきの１次元葉層構造Ｒを考える。a) 上記 2 本の直線はＲの葉である。b) Ｄの内部ではＲは束葉層である。このような葉層構造Ｒは、互いに位相同型である。これを Reeb 葉層という。
　軌道葉層がＲであるような流れのことをＲ流れといおう。驚くべきことに、Ｒ流れは互いに位相共役というわけではない。その位相共役類はある正値関数の同値類と１対１の関係にあることが Le Roux 氏により、示されている。ここに述べた関数は、正の実数全

体のなす区間上定義されており、変数が０に近づくとき、値が無限大に近づくという性質を持っている。さて、この中で、単調減少関数の全体はひとつの類をなしている。それに対応するＲ流れを標準的なＲ流れと呼ぶ。これは、式で書くとき、一番簡単な式で書くことができるもので、Ｒ流れの中で、ある意味できれいなただひとつの流れである。

そこで、標準的なＲ流れのみが持つ、力学系的に美しい性質があるのではないかと考え、次の結果を得た（参考文献⑪)。

定理　Ｒ流れが、任意の正数ｋに対し、時間をｋ拡大した流れと位相共役ならば、そのＲ流れは、標準的である。

(4) 上に出てきた領域Ｄを考え、その上の Reeb 葉層を考えるのであるが、ここでは、Reeb 葉層をひとつ固定することはしない。Ｄ上の向きと境界成分を保つ同相写像ｈを考える。ｈはある Reeb 葉層の各葉を保ち、その上で、与えられた向きに関し、軌道が単調増大であるとき、Reeb 同相写像と呼ばれる。これらの中には、いかなる流れの時間 1 写像とも、なることのないものがある (Beguin-Le Roux)。

しかし、ここでは流れの時間１写像となっているものを考える。この流れはある Reeb 葉層を保つのであるが、これは、もともとのものと同一ではないかもしれない。また、こういう流れは、性質の異なるものが、非常にたくさんあるということも考えられる。
例えば、標準的Ｒ流れの時間１写像ｈの場合、ｈをＤのふたつの境界成分に制限したとき、多くの流れの時間１写像になることができる。それを、各成分上任意に選ぶとき、ｈを時間 1 として持つ流れで、制限が、与えられたものと一致するものを構成することができる。そこで標準的でない場合はいかがであろうかというのが、我々の考えた問題であり、次の結果を得るに至った（参考文献⑨)。

定理　ｈを非標準的 Reeb 流れの時間１写像とする。このときＤの片側の境界から、もう片側の境界への、向きを保つ同相写像ｆが存在し、次の性質を満たす。

ｈを時間１とする任意の流れを両側の境界に制限した流れはｆにより、共役である。

この定理の言うところは、非標準的の場合、流れは、標準的の場合の半分の自由度しかないということである。

(5) 多様体（コンパクトとは限らない)Ｍ上に葉層構造Ｆを考える。Ｆは極小、すなわちＦの各葉はＭ中で稠密であると仮定する。Ｆに横断的である開球体Ｂを考える。（Ｂの次元はＦの余次元に一致させておく。）このとき、Ｆの葉のなかの曲線ｃで、Ｂの２点ｘとｙを結ぶものを考えると、ｘのＢにおける近傍から、ｙのＢにおける近傍への、Ｆの葉に沿う、同相写像が定まる。これを、ｃに沿ってのホロノミー写像という。

定理１　ホロノミー写像が、みな、同程度連続ならば、Ｂ上にホロノミー写像で不変な有限測度が存在する。

この定理は、コンパクト多様体上の擬群に対しては、Sacksteder により、すでに得られていた。しかし、葉層構造から定まる擬群の作用する領域は、例え、多様体Ｍがコンパクトであったとしても、コンパクトにとることはできない。したがって、Sacksteder の結果は、実は、葉層構造に応用することは、できないものであった。そこでコンパクト性の仮定を外し、もう一度、考え直す必要を感じたのである。また、同様の議論を再度繰り返すことにより、次の結果を得た（参考文献③)。

定理２　さらにＭがコンパクトのとき、Ｂ上のホロノミー写像で不変な有限測度は、定数倍を除き、ただ一通りに定まる。

(6) ｆを円周の無限回微分可能写像とし、実数ｔに対し、R(t) でｔ回転写像を表す。このとき合成写像 R(t) f の回転数 r(t)は、いかなる性質を持つであろうかという問題を考える。簡単のためｔは 0 から 1 までを動き、r(0)=0, r(1)=1 を満たすと設定しておく。ｆ自体が回転の場合は、この問題は、まったく面白くないので、ｆは回転ではない、つまり、ｆ’は恒等的に 1 では無いとする。このときｒの値がある有理数になるようなｔの値のなす集合は内部を持つ。その内部をすべての有理数にわたり合併をとれば、値 t のひとつの開集合が得られる。その補集合をＣと表すこととする。言い換えれば、Ｃは無理数集合のｒ による引き戻しの閉包である。

Arnold により、この集合Ｃはルベーグ測度が正であることが、知られている。 さらに Herman は、関数 r は絶対連続であること、さらに非 Liouville 数の全体のなす集合のｒによる引き戻しの集合Ｎもまたルベーグ測度が正であることを示した。さらに辻井正人は、実は、差集合 C-N の測度が 0 であることを示した。我々は、この辻井の結果を、比較的簡単に導く論法を発見した。それを用いることにより、次の定理を得た（参考文献⑤)。

定理１ r(t) を無理数とする、このとき、h->0 のときの式 (r(t+h)-r(t))/h の

limsup は 1 より大きい。

定理２　r(t)を無理数とし、さらに f を実解析的であると仮定する。このとき、上の limsup は無限大である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① S. Matsumoto, A characterizaton of the standard Reeb flow, Hokkaido Math. Journal, 査読有, 42(2013) 69-80

② S. Matsumoto and H. Kodama, Minimal C^1 diffeomorphisms of the circle which admit measurable fundamental domains, Procedings of Ameirican Mathematical Society, 査読有, 141(2013) 2061-2067

③ S. Matsumoto, Flows of flowable Reeb homeomorphisms, Annals de l' Institute Fourier 62(2012) 887-897

④ S. Matsumoto, The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations. Tohoku Mathematical Journal,査読有, 64(2012) 569-592.

⑤ S. Matsumoto, Pirme end rotation numbers of invariant separating continua of annular homeomorphisms, Proceedings of Americal Mathematical Society, 査読有, 140(2012) 839-845

⑥ S. Matsumoto, Dense properties of the space of circle diffeomorphisms with a Liouville rotation number, Nonlinearity 査読有, 25(2012) 1495-1511
DOI: 10.1088/0951-7715/25/5/1495

⑦ S. Matsumoto, Derivatives of rotation numbers of one parameter families of circle diffeomorphisms, Kodai Mathematical Journal, 査読有, 35(2012) 115-125

⑧ T. Inaba, S. Matsumoto and Y. Mitsumatsu, Normally contracting Lie group actions, Topology and its Applications,査読有,159(2012), 1334-1338

⑨ S. Matsumoto and H. Nakayama, Continua as minimal sets of homeomorphisms of S^2, l'Enseigement Mathematique, 査読有, 57(2011) 373-392
ISSN 0013-8584

⑩ S. Matsumoto, The unique ergodicity of equicontinuous laminations, Hokkaido Journal of Mathematics, 査読有, 39(2010), 389-403

⑪ S. Matsumoto, The parameter rigid flows on oriented -manifolds,Contemporary Mathematics 査読有, 498(2009), 135-139

⑫ S. Matsumoto, Locally free Lie group actions, Sugaku Expositions, 査読なし, 22(2009), American Mathematical Society, 21-36

〔学会発表〕（計４件）

① S. Matsumoto, Dense properties of the circle diffeomorphisms, Foliation 2012, Lodz, Poland, June 2012

② 松元　重則　円周上の微分可能同相写像、日本数学会秋季総合分科会、企画特別講演、松本市、2011 年 9 月

③ S. Matsumoto, Minimal C^1 diffeomorphisms of the circle which admit measurable fundamental domains, XVII Encontro Brazileiro de Topologia, Rio de Janeiro, August 2010.

④ S. Matsumoto, The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations.,"Foliations," CRM Barcelona, 2010.

６．研究組織
(1)研究代表者
松元　重則（MATSUMOTO, SHIGENORI）
日本大学・理工学部・教授
研究者番号：80060143

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
中山　裕道（NAKAYAMA, HIROMICHI）
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：30227970

稲葉　尚志（INABA, TAKASHI）
千葉大学・自然科学研究科・教授
研究者番号：40125901

三松　佳彦（MITSUMATSU, YOSHIHIKO）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：70190725

児玉　大樹（KODAMA, HIROKI）
東京大学・数理科学研究科・特任助教
研究者番号：40466826

坪井　俊（TSUBOI, TAKASHI）
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：40114566