**様式Ｃ－１９**

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月　17 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2011
課題番号：20540097
研究課題名（和文）　無限生成の対象の研究（野性的空間の基本群）
研究課題名（英文）　Ininfitely generated objects (fundamental groups of wild spaces)
研究代表者

江田　勝哉（ EDA KATSUYA ）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：90015826

研究成果の概要（和文）：
非可算特有の現象であるスペッカー現象の非可換化を中心に群論的、代数位相幾何的研究をした。とくに、一次元ペアノ空間の基本群がホモトピー型を決定すること、また基本群間の任意の準同型写像が本質的には連続写像によって導かれることを示した。一般にペアノ空間の基本群は野性的な部分で自由積に分解されないことを示した。2 次元セルライクな単連結非可縮なペアノ空間の存在を示した。

研究成果の概要（英文）：
The central theme is the non-commutative Specker phenomenon, which is generic for uncountable groups. We studied it related to group theory and algebraic topology.
In particular we proved the following. The fundamental groups of Peano continua determine the homotopy types and each homomorphism between thosegroupsis essentially induced from a continuous map. In general the fundamental group of an arbirary Peano continuum cannot be decomposed into a non-trivial free product at wild parts. There exists a 2-dimensional, cell-like, simply-connected, non-contractible Peano continuum.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００８年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| ２００９年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| ２０１０年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| ２０１１年度 | 0 | 0 | 0 |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 2,300,000 | 690,000 | 2,990,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何

## １．研究開始当初の背景

既に、10年以上続けてきている野性的空間の代数位相幾何学的考察は非可算非可換群の研究との連携のもとに進める方法が研究代表者の研究である。
これは、位相的あるいは幾何学的方向で進める他研究者の研究方法とは異なる面があり、これらの方法の融合が更なる研究の発展につながるものと考えてきた。

## ２．研究の目的

いくつかの項目について説明する。

1. 非可換スペッカー現象：
Hawaiian earring の基本群からの準同型写像が必ず有限台をもつ群を n-slender 群とよばれる。可換群の場合以外は，非可換の場合はほとんどわかっていないので、これについて解明する。

2. 無限語、及び連続語の研究:
無限語、連続語の場合も既約語、既約道の有限列からは、通常の有限語と同じ有限ステップでの簡約手順があり、これにより群論的性質を調べることができる。

3. 非可算非可換群の研究:
1 の非可換スペッカー現象をもとに野性的空間の基本群を中心に研究する。

4. 1-2次元連結コンパクトアーベル群の連結カバーの研究:
1次元連結コンパクトアーベル群の連結有限カバーはポントリャギン双対によってアーベル群との対応により、既によく知られている。そこで2次元連結コンパクトアーベル群の連結有限カバーおよび1次元連結コンパクトアーベル群の無限カバーを研究する。連結無限カバーが存在するかを解明する。

5. Grope 群の問題: Grope とは、円周にハンドルをつける操作を無限回繰り返してできる空間のことで、Grope group とはその基本群である(極限点は付け加えられないのでコンパクトではない)。

## ３．研究の方法

1.　有限生成の群の場合過去に Combinatorial group theory の研究があり、これについて中村順（大学院生）と共同研究を行った。

2. 研究代表者の過去の結果を押し進めるとともに、Peano 連続体の簡略化に関する M.Meilstrup の結果を援用した。

3. 研究代表者の過去の結果を典型的な野性的空間の基本群に適用し、群論的考察を行った。U. Karimov, D. Repovs との共同研究を行った。また以前からの共同研究者である川村一宏と共同研究を行った。

4. すでに2次元連結コンパクトアーベル群の有限カバーについて共同研究をしていた V.Matijevic との共同研究を行った。

5. 有限語の組み合わせ論的手法について M.Cenceji, A.Vaptetic との共同研究を行った。

## ４．研究成果

番号はそれぞれ、研究目的、研究方法の番号に対応する。

1. 有限表示 torsionfree 群が n-slender となるとは限らないことが、よく知られた結果から導けることが G. Conner から連絡された。その結果、有限表示型の場合も多くの問題があることがわかりこれ集中した結果、surface 群、Baumslag 群などが n-slender であることを示した（中村順(研究代表者の研究室所属)の preprint がある）。

2. 連続語の研究により基本群 $\pi_1(X)$ の代数的性質の解明に利用し次の結果を得た。

定理1 [4]: 1次元ペアノ空間 $X,Y$ について基本群 $\pi_1(X)$ と $\pi_1(Y)$ が同型であることと $X$ と $Y$ がホモトピックであることが同値となる。

定理2 [4]: $X,Y$ を1次元ペアノ空間とし $x\in X, y\in Y$ とする。任意の準同型写像 $h: \pi_1(X)\to\pi_1(Y)$ に対して、連続写像 $f:X\to Y$ と $p(0)=y, p(1)=f(x)$ となる道 $p$ があり $h = \varphi_p f_*$ が成立する。ここで $\varphi_p$ は定点変更同型写像である。

定理3 [4]: $X,Y$ を1次元ペアノ空間とし連続写像 $f:X\to Y$ について、$f_*$ が同型写像とする。このとき $f$ は $X$ と $Y$ のホモトピー同値を与える。

これらは非可換スペッカー現象が1次元空間の基本群の構造を支配していることを示している。

定理4: [3] Hawaiian earring H から $n$ 個の円弧を除いた空間を $H_n$ とする。基本群 $\pi_1(H)$ から自由積 $G_0*G_1$ への任意の準同型写像 $h$ に対して $n$ が存在し $h(H_n)$ は $G_0$ または $G_1$ の共役類に含まれる。

定理5: [3] $X$ がペアノ空間ですべての点で locally semi-simply connected でないとする。基本群 $\pi_1(X)$ が自由積 $G_0*G_1$ の部分群であれば $\pi_1(X)$ は $G_0$ または $G_1$ の共役類に含まれる。

3. Topologist sine 曲線を使い ペアノ空間 $X$ から単連結ペアノ空間 $SC(X)$ を構成し、次を証明した [7],[6],[2]。

定理6:
(a) 空間 $X$ が可縮であることは $SC(X)$ が可縮であること同値である。
(b) 以下の(1)(2)(3)は同値である。
(1) $\pi_1(X)$ が自明 (2) $\pi_2(SC(X))$ が自明 (3) $H_2(SC(X))$ が自明

空間 $X$ 上の錐の無限個のコピーを上下を交互にしてスクエアーに貼り付けた空間を $AC(X)$ とする。このとき $AC(X)$ は $SC(X)$ に比べ一見ずっと簡単な構成であるが上記の $SC(X)$ と同じ性質をもつ。

定理7: [1]
(a) 空間 $X$ が可縮であることは $AC(X)$ が可縮であること同値である。
(b) 以下の(1)(2)(3)は同値である。
(1) $\pi_1(X)$ が自明 (2) $\pi_2(AC(X))$ が自明 (3) $H_2(AC(X))$ が自明

定理8: [1] Hawaiian earring H に対して $SC(H)$ と $AC(H)$ はホモトピー同値ではない。

定理9:[5] $X_0, X_1$ を1次元コンパクト距離空間とする。このとき、2以上の $n$ に対して錐 $C(X_0),C(X_1)$ の1点和 $C(X_0)\vee C(X_1)$ の $n$次ホモトピー群はすべて自明となる。

定理10:[5] $X_0, X_1$ を任意の空間とし、1点和 $X_0\vee X_1$ について $\pi_2(X_0\vee X_1)$ が自明とする。このとき $\pi_2(C(X_0)\vee C(X_1))$ も自明となる。

4.

定理11:[8] 2次元連結コンパクトアーベル群の中で、p−進整数 α により記述できるものを A_α とする(正確にはそのポントリャギン双対)。このときその連結有限カバーは分類され、カバーとして同値でないものはコンパクトアーベル群として非同型となる。

定理12: Solenoid (1 次元連結コンパクトアーベル群)の連結無限カバーはそれが存在すれば、その空間に群構造は入らない。

定理13: 任意の Solenoid に対して連結無限カバーが存在する(投稿中)。

5. 既に得られていた群論的結果が空間としての性質をもつことを示した。その結果、つぎが成立する。
定理14: minimal grope から 別の grope へ homotopical に非自明な連続写像が存在することとその grope が minimal grope を部分空間として含むことが同値となること(投稿中)。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

[1] K. Eda, U. H. Karimov and Dusan Repovs, On 2-dimensional nonaspherical cell-like Peano continua: a simple approach, Meditarranean J. Math., electronically. (印刷中)査読有

[2] K. Eda, U. H. Karimov and Dusan Repovs, On the singular homology of one class of simply-connected cell-like spaces, Meditarr. J. Math., 8 (2011), 153-160. 査読有

[3] K. Eda, Atomic property of the fundamental group of the Hawaiian earring and wild Peano continua, J. Math. Soc. Japan, 63 (2011), 769--787. 査読有

[4] K. Eda, Homotopy types of one-dimensional Peano continua, Fund. Math., 209 (2010), 27--45. 査読有

[5] K. Eda and K. Kawamura, On the asphericity of one-point unions of cones, Topology Proc., 36 (2010), 63--73. 査読有

[6] K. Eda, U. H. Karimov and Dusan Repovs, On the second homotopy group of SC(Z), Glasnik Mate., 44 (2009), 493--498. 査読有

[7] K. Eda, U. H. Karimov and Dusan Repovs, A nonaspherical cell-like 2-dimensional continuum and related constructions, Topology Appl., 156 (2009), 515--521. 査読有

[8] K. Eda and V. Matijevic, Finite index supergroups and subgroups of torsionfree abelian groups of rank two, J. Algebra, 319 (2008), 3567-3587. 査読有

〔学会発表〕（計７件）

［1］ Algebraic properties for wild spaces, Strobl, 2011 年 7 月

［2］ Atomic property of the fundamental group of the Hawaiian earring and wild Peano continua, Dubrovnik 2011 年 6 月

［3］Homotopy types of one dimensional Peano continua, Kielce, 2010年7月

［4］ Nonstandard analysis の応用, 日本数学会 2010 年 9 月

［5］ Homotopy types of one dimensional Peano continua, 京都数理解析研究所 2009 年 10 月

［6］超準解析の応用, 日本数学会(東京大学) 2009 年 4 月

［7］Specker Phenomenon for the uncountable case, 京都数理解析研究所 2008年8月

〔図書〕（計 １件）

[1] 数理論理学：使い方、考え方 内田老鶴圃，2010 年。

〔その他〕

ホームページ等

http://www.logic.info.waseda.ac.jp/~eda/

６．研究組織

(1)研究代表者

江田勝哉（EDA KATSUYA）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：90015826