

機関番号：34304

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540098

研究課題名 (和文) 微分同相群と交換子の長さについての研究

研究課題名 (英文) Study on Diffeomorphism Groups and Commutator Length

研究代表者

福井 和彦 (FUKUI KAZUHIKO)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：30065883

研究成果の概要 (和文) : 多様体上の幾何構造を解明するため、幾何構造を保つ微分同相群の代数的構造の研究を、特に種々の幾何構造に対して、その 1 次元ホモロジー群の決定や交換子長及び単純性について行った。成果として、(1)有限群の表現空間に対する同変微分同相群の 1 次元ホモロジー群の決定、および種々の幾何構造に対するその応用、(2)モース型特異点を持つ余次元 1 葉層に対して葉層を保つ微分同相群の 1 次元ホモロジー群の決定、(3)多様体対 (M, N) に対して、 N を保存する M の微分同相群が完全群であることの証明、および境界を持つ多様体に対して、一様完全性についての考察、(4)葉を保つ微分同相群が単純群になる条件の特徴づけ、および(5)2 次元トーラス上の 1 次元葉層に対する葉を保つ微分同相群の一様完全性の特徴づけを挙げることができる。

研究成果の概要 (英文) : I studied the algebraic structure (for instance, 1 dimensional homology group and commutator length and others) of the diffeomorphism groups preserving geometric structures. As results, I got (1) Decision of 1 dimensional homology group of the equivariant diffeomorphism groups for representation spaces of finite groups and its application to various geometric structures, (2) Decision of 1 dimensional homology group of the foliation preserving diffeomorphism groups for foliations with singularities of Morse type, (3) Proof of the perfectness of the diffeomorphism group preserving a submanifold and the consideration of the uniform perfectness for special compact manifolds with boundary, (4) Characterization of the simplicity of the leaf preserving diffeomorphism group for foliated manifolds, and (5) Characterization of the uniform perfectness of the foliation preserving diffeomorphism groups for 1 dimensional foliations on the torus.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：微分トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分同相群、幾何構造、完全群、交換子長、単純性

1. 研究開始当初の背景

幾何構造を保つ微分同相群の構造を研究することはクライン以来研究されている重

要な問題であり、種々の幾何構造に深く関連している。本研究は種々の微分同相群の構造の研究を通して幾何構造の特性を解明する

ことにある。

Anderson, Herman, Mather, Thurstonらは多様体の同相群や微分同相群の構造を研究し、この群の完全性や単純性についての知見を得た。Matherは n 次元ユークリッド空間のコンパクトな台を持つ同相群の1次元以上のホモロジー群が消えることを示した。坪井は C^1 級微分同相群の構造の研究や直線 R や円周 S^1 の同相群の力学的研究、閉区間 $[0, 1]$ の同相群のいろいろな部分群の1様完全性の解明を皮切りに、一般の多様体に対する微分同相群の1様完全性および1様単純性、さらには解析的微分同相群の構造の研究を行っている。先行研究として、Thurston, Banyagaらは体積、接触構造やシンプレクティック構造を保つ微分同相群の研究を行っている。Gambaudo, Ghys, Entov, 坪井らによる交換子長に関する研究があり、1様完全性や交換子長についての研究や幾何構造を保つ微分同相群の構造を解明する研究はそれらの同一線上にあり、幾何構造が微分同相群にどのような影響を与えているかを解明する上で意義深いものと思われる。

2. 研究の目的

微分同相群およびその部分群の位相的、代数的構造の研究は多様体の分類理論や葉層構造論の研究と深く関係している。本研究の目的は、幾何構造をもつ多様体に対してその構造を保つ微分同相群の群構造に焦点をあてて考察することにより、その幾何構造の特性を解明することである。その群が完全であるか、1様に完全であるかや交換子の個数(交換子長関数)の様子はその幾何構造に実り多い情報を与えている。

本研究では主に次の2点について研究を行った。

- (1) 幾何構造を保つ微分同相群の代数的性質、特に群の元の交換子長についての考察。
- (2) 特異点をもつ幾何構造に対して、その幾何構造を保つ微分同相群の構造、特に1次元ホモロジー群の考察。

(1) においては、幾何構造として、部分多様体や葉層構造が対象。

(2) においては、実モース型特異点をもつ葉層を保つ微分同相群や群作用を持つ多様体の同変微分同相群等およびその応用が対象。

3. 研究の方法

幾何構造を保つ微分同相群の構造についての以下の研究を以下のように行った。

- (1) 微分同相群の1様完全性の解明と交換子

長の考察および完全性と単純性の関連の考察、

- (2) 実モース型特異点をもつ余次元2葉層を保つ微分同相群の1次元ホモロジー群について考察、
- (3) 群作用を持つ多様体の同変微分同相群の1次元ホモロジー群について考察。

① 各種関連の研究集会に出席し、情報収集および研究連絡を行った。具体的には、

20年度においては、「全日本トポロジーシンポジウム」、「幾何学シンポジウム」、「葉層構造論シンポジウム」、「接触構造、特異点、微分方程式およびその周辺」に出席し、情報収集および研究連絡を行い、「葉層構造論シンポジウム」では講演を行った。また、信州大学の阿部孝順教授と微分同相群に関する研究連絡を行った。

21年度においては、「トポロジーと特異点の幾何研究集会」、「全日本トポロジーシンポジウム」、「幾何学シンポジウム」、「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」に出席し、情報収集および研究連絡を行い、「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」では講演を行った。また、信州大学の阿部孝順教授と微分同相群に関する研究連絡を行った。

22年度においては、「空間認識のための特異点論研究集会」、「全日本トポロジーシンポジウム」、「幾何学シンポジウム」、「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」、「接触構造、特異点、微分方程式およびその周辺」に出席し、情報収集および研究連絡を行った。また、信州大学の阿部孝順教授と微分同相群に関する研究連絡を行った。

② 毎年、研究資料図書による知識の獲得および研究会において、専門的知識の提供を受けた。

③ 研究会の開催による情報収集、および議論を行った。具体的には、

20年度においては、8月に「山代微分トポロジー研究会」を主催し、微分同相群と関連分野についての9つの講演を持ち、実りある研究連絡および情報交換を行った。講演者は矢ヶ崎達彦(京都工芸繊維大)、伊藤敏和(龍谷大)、足助太郎(東京大)、佐藤肇、中西靖忠(岐阜経済大)、森淳秀(大阪大)、松田能文(東京大)、野澤啓(東京大)、福井和彦の各氏であった。

2月に「同相群とその周辺」研究会を主催し、同相群に関連する8つの講演を持ち、実りある研究連絡および活発な議論を行った。講演者は坪井俊(東京大)、阿部孝順(信州大)、矢ヶ崎達彦(京都工芸繊維大)、保坂哲也(宇都宮大)、松田能文(東京大)、嶺幸太郎(筑波大)、山下温(東京大)、柳井佳奈(お

茶の水女子大)の各氏であった。

21年度においては、8月に「山代微分トポロジー研究会」を主催し、微分同相群と関連分野についての9つの講演を持ち、実りある研究連絡および情報交換を行った。講演者は矢ヶ崎達彦(京都工芸繊維大)、伊藤敏和(龍谷大)、足助太郎(東京大)、佐藤肇、森淳秀(大阪大)、松田能文(東京大)、横山知郎(東京大)、柳井佳奈(お茶の水女子大)、福井和彦の各氏であった。

1月に「京都微分トポロジーセミナー」を龍谷大学の伊藤敏和氏とともに開催し、実りある研究連絡を行った。講演者は伊藤敏和(龍谷大)、森淳秀(大阪大)であった。

22年度においては、8月に「尾鷲微分トポロジー研究会」を主催し、微分同相群と関連分野についての10の講演を持ち、実りある研究連絡および情報交換を行った。講演者は矢ヶ崎達彦(京都工芸繊維大)、足助太郎(東京大)、佐藤肇、山岸義和(龍谷大)、森淳秀(大阪大)、松田能文(東京大)、柳井佳奈(お茶の水女子大)、石田智彦(東京大)、小川竜(中央大)、福井和彦の各氏であった。

④ 各種の研究集会で研究成果の発表を行った。

4. 研究成果

幾何構造を保つ微分同相群の代数的構造、特にその1次元ホモロジー群の決定、交換子長および群の単純性についての研究を行った。

成果として、

(1)有限群の表現空間に対する微分同相群の1次元ホモロジー群を決定した。具体的には、 V を有限群 G の表現空間、 $D_G(V)$ をコンパクトな台をもち、恒等写像にイソトピックな同変微分同相写像からなる群とする。このとき、 $D_G(V)$ の1次元ホモロジー群 $H_1(D_G(V))$ は $\dim V^G=0$ のとき、 $H_1(\text{Aut}_G(V)_0)$ に同型、 $\dim V^G>0$ のとき、0になる。すなわち、 $D_G(V)$ は完全群である。ここで、 $\text{Aut}_G(V)_0$ は V の G 同変線形同型からなる群の単位連結成分、 V^G は V 上の G 固定点集合である。このとき、 $H_1(\text{Aut}_G(V)_0)$ は $\mathbf{R}^d \times U(1)^d$ の形である事が容易にわかる。したがって、 $H_1(D_G(V))$ を完全に決定できる。

この応用として、軌道体の自己同型群、コンパクト・ハウスドルフ葉層に対する葉層を保つ微分同相群、局所自由 S^1 作用を持つ3次元多様体に対する同変微分同相群の1次元ホモロジー群を決定した。

(2)モース型特異点を持つ余次元1葉層に対して、葉層を保つ微分同相群の1次元ホモロ

ジー群を決定した。具体的には、 F_ϕ を n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n 上の指数 r のモース関数 ϕ の等位面によって定義された葉層とする。 $D_r(\mathbf{R}^n, F_\phi)$ を“コンパクトな台”をもち、恒等写像にイソトピックな F_ϕ を保つ微分同相写像からなる群とする。このとき、 $D_r(\mathbf{R}^n, F_\phi)$ の1次元ホモロジー群 $H_1(D_r(\mathbf{R}^n, F_\phi))$ は $n=2$ 、 $r=0$ 、 n のとき、 $\mathbf{R} \times S^1$ に同型、それ以外の場合は、 \mathbf{R} に同型である。

この応用として、モース型特異点を持ち、全ての葉がコンパクトかつホロノミーを持たないコンパクト多様体上の余次元1の葉層に対して、葉層を保つ微分同相群の1次元ホモロジー群が計算できて、特異点の個数と指数0と n の特異点の個数で特徴づけることができる。

(3)多様体対 (M, N) に対して、 N を保存する M の微分同相群が完全群であることを示し、境界を持つ多様体に対して、一様完全性について考察した。具体的には、 N を m 次元多様体 M の n 次元部分多様体とし、 $D_r(M, N)$ を N を保存し、コンパクトな台をもち、恒等写像にイソトピックな M の微分同相写像からなる群とする。このとき、 $\dim N > 0$ なら、 $D_r(M, N)$ は完全群であることを示した。この結果の先行研究はT. Rybickiによりなされているが、証明の理解が困難であり、我々の手法はKAM理論によっており、より具体的である。なお、 $\dim N = 0$ のときは、完全群でないことが福井により指摘されている。

この応用として、境界を持つコンパクトな多様体に対して、特別な場合の一様完全性について考察した。すなわち、上記結果から、境界を持つコンパクト多様体に対する微分同相写像は何個かの交換子の積で書き表されるが、この個数が有界であるかを考察することである。例として、 n 次元円盤に対する微分同相群は一様完全群であることを指摘した($n > 1$)。

(4)葉を保つ微分同相群が単純群になる条件を特徴付けた。具体的には、 F をコンパクト多様体 M 上の葉層、 $D_r(M, F)$ を F の葉を保つ微分同相群の単位連結成分とする。このとき、 $D_r(M, F)$ が単純群である必要十分条件は F の葉が全て稠密であることを示した。

(5)2次元トーラス上の1次元葉層に対する葉層を保つ微分同相群の単位連結成分は完全群になることは知られているが、この群はいつ一様完全群になるかを考察し、全ての葉が稠密であるときのみ、一様完全群になることを示した。その他、球面上の球面束上のファイバーを葉とする葉層に対しても一様完全性の考察を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① 福井和彦: The necessary and sufficient condition for the group of leaf preserving diffeomorphisms to be simple, J. Math. Soc. Japan, 査読有, **2011**, 掲載決定
- ② 阿部孝順、福井和彦: Commutators of C^∞ -diffeomorphisms preserving a submanifold, J. Math. Soc. Japan, 査読有, Vol. 61-2, **2009**, **427-436**
- ③ 福井和彦: On the first homology of foliation preserving diffeomorphisms for foliations with singularities of Morse type, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, Vol. 44-4, **2008**, **1057-1068**
- ④ 阿部孝順、福井和彦: The first homology of the group of equivariant diffeomorphisms and its applications, Journal of Topology, 査読有, Vol. 1, **2008**, **461-476**

[学会発表] (計 5 件)

- ① 福井和彦: 幾何構造を保つ微分同相群の代数的性質, 「尾鷲微分トポロジー2010」研究集会, 尾鷲中央公民館 (三重県尾鷲市) 2010 年8 月24 日
- ② 福井和彦: Commutator length of leaf preserving diffeomorphisms, 「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」研究集会, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘 (京都市) 2009 年12 月13 日
- ③ 福井和彦: 葉を保つ微分同相写像の交換子の長さについて, 「山代微分トポロジー」研究集会, 山代地区会館 (石川県加賀市) 2009 年8 月19 日
- ④ 福井和彦: 部分多様体を保つ微分同相写像の交換子, 「微分同相群と葉層構造」研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市) 2008 年10 月29 日
- ⑤ 福井和彦: 境界をもつ多様体の微分同相群の一様完全性について, 「山代微分トポロジー」研究集会, 山代地区会館 (石川県加賀市) 2008 年8 月28 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福井 和彦 (FUKUI KAZUHIKO)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号: 30065883