

機関番号：32615

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540111

研究課題名（和文） 多値論理における有限体上の極小クローンの分類

研究課題名（英文） Classification of minimal clones over a finite field in multiple-valued logic

研究代表者

町田 元 (MACHIDA HAJIME)

国際基督教大学・大学院アーツ・サイエンス研究科・研究員

研究者番号：40090534

研究成果の概要（和文）：

集合 A 上の多変数関数の集合で、射影関数をすべて含み、関数合成に関して閉じているものをクローンという。 A 上のクローンの全体は束の構造をもつ。クローン束のうち射影関数のみからなるクローンを除いた部分での極小元を極小クローンという。本研究では、集合 A に有限体の構造を導入し、極小クローンの生成元となる関数を有限体上の多項式として捉えるという新しい視点から、極小クローンの分類を目指す研究を行った。

極小クローンの生成元となる関数が2変数 idempotent 関数の場合や3変数多数決関数の場合について、要素数が任意の素数べきの A に対して、極小クローンの生成関数の多項式表現を求めるといった成果をあげた。

研究成果の概要（英文）：

For a fixed set A , a set of multi-variable functions defined over A is called a clone if it contains all projections and is closed with respect to (functional) composition. The set of all clones on A has the structure of a lattice. An atom of the lattice of clones is called a minimal clone. In this research, we introduced the structure of a finite field into the base set A and considered generating functions of minimal clones as polynomials over the finite field A . Under this new point of view, we aimed at classifying minimal clones.

For minimal clones which are generated by binary idempotent functions or ternary majority functions, we have succeeded to find the polynomial expressions of their minimal functions for arbitrary A with the cardinality of prime power.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：離散数学，普遍代数，多値論理

1. 研究開始当初の背景

集合 A 上の多変数関数の集合で、射影関数をすべて含み、関数合成に関して閉じているものをクローンという。 A 上のクローンの全体は束の構造をもつ。本研究では、 A が有限集合の場合のみを扱い、 A の要素数を k とおく。 $k = 2$ の場合を除き、クローンの束の構造は極めて複雑であり、まだほとんど解明されていない。

クローン束のうち、関数全体からなるクローンを除いた部分での極大元を極大クローンといい、射影関数のみからなるクローンを除いた部分での極小元を極小クローンという。極大クローンは、すでに、任意の $k > 1$ に対して完全に決定されているが、一方、極小クローンはわずかに $k = 2, 3$ の場合に完全な決定がなされているだけで、それ以外の場合については、いまだに、部分的な知識しか得られていない。

極小クローンの完全な決定は、クローン理論における極めて大きな未解決問題の一つである。

2. 研究の目的

極小クローンは、その生成元の種類によって、ごく大雑把に、5 個の型に分けられることが知られている。そのうちの 1 つの型は、生成元が 2 変数 idempotent 関数の場合であり、別の 1 つの型は、生成元が 3 変数多数決関数の場合である。なお、2 変数関数 $f(x, y)$ は A に属すすべての a に対して $f(a, a) = a$ となるとき idempotent 関数という。また、3 変数関数 $g(x, y, z)$ は 3 つの引数のうち少なくとも 2 つが同じ値であるとき常に g の値もその値となるとき多数決関数という。

本研究では、おもに、生成元が上記の 2 つの型の場合を対象として、一般の $k > 2$ に対する極小クローンの分類・決定を目標とした。ただし、これは非常に大きな目標であるので、上記の 2 つの型について、極小クローンの新しい具体例を多く求めることを手近な研究目的とした。

3. 研究の方法

本研究の特色は、基礎の集合 A に有限体の構造を導入し、極小クローンの生成元となる関数（極小関数）を有限体上の多項式として捉えるという新しい視点からの研究方法をとるところにあった。極小関数を多項式として見ることにより、極小クローンの分類を目指す、あるいは、新しい極小クローンを見出すことを狙うという研究の方法であった。

上記のように、 $k = 3$ の場合にはすべての

極小クローンが決定されている。これは、B. Csakany の結果であるが、本研究では、この Csakany の結果を出発点とした。

まず、Csakany が求めた極小関数 f のすべてについて f の有限体 $\text{GF}(3)$ 上の多項式表現 P を求めた。次に、 P を出発点とし、任意の素数ベキ $k > 3$ 上の多項式への P の一般化を試みた。

4. 研究成果

(1) 3 値、すなわち、 $k = 3$ の場合、2 変数 idempotent 関数によって生成される極小クローンは全部で 48 個存在する。そのうちのほぼ半数のものに対し、極小関数となる多項式の一般化を得ることができた。

2 変数 idempotent 関数で極小関数となる多項式の例として、2 つの関数 g_1, g_2 を示す。

$$g_1(x, y) = x^{k-1} + xy^{k-1} - x^{k-1} y^{k-1}$$

$$g_2(x, y) = -x + 2xy^{k-1}$$

これらを含むおよそ 20 個の idempotent 関数について、それらは、任意の素数ベキ k 上で極小クローンを生成することが証明された。

(2) 3 変数多数決関数を生成元とする極小クローンは、 $k = 3$ の場合には 7 個存在するが、それらのすべてについて、任意の素数ベキ $k > 3$ に対する一般化となる多項式を求めることができた。

次に示す 2 つの関数は、3 変数多数決関数で極小関数となるものの例である。

$$h_1(x, y, z) = m(x, y) + z d(x, y)$$

$$h_2(x, y, z) = m(x, y) + m(y, z) + m(x, z) - 2 m(x, y) m(y, z) m(x, z) x^{k-3}$$

ただし、関数 d, m は次のように定める。

- $x=y$ のとき $d(x, y)=0, x \neq y$ のとき $d(x, y)=1$
- $x=y$ のとき $m(x, y)=x, x \neq y$ のとき $m(x, y)=0$

上に述べたように、3 値の場合の 3 変数多数決関数を生成元とする 7 個の極小クローンのすべてに対し、任意の素数ベキ k への一般化を与える極小関数を少なくとも 1 つずつ求めることができた。この部分の研究を遂行する際、極小クローンに造詣の深い若手研究者である T. Waldhauser 博士（ハンガリ

一)の協力が極めて有効であった。

(3) 多変数関数の間に, 1 変数関数の場合の自然な拡張として, 可換性を定義することができる。さらに, その可換性に基づき, 中心可能クローンや中心可能モノイドという概念が定義される。中心可能モノイドの英語名は centralizing monoid または endoprimal monoid である。

本研究から派生する研究として, 中心可能モノイドの分類の研究も進め, 極大な中心可能モノイドと極小関数の間に密接な関係が存在するのを見出した。3 値の場合に対する研究から, とくに, 3 変数多数決関数で極小関数となるものと極大中心可能モノイドとの間に強い関係が存在することを示唆する結果が得られた。これは大変興味深い結果であり, その一般化が今後の研究テーマの一つになる。

(4) これらの研究成果については, 国内外のいくつかの学会等で発表を行ってきたが, クローン理論の権威である I. G. Rosenberg 教授 (カナダ) や P. P. Palfy 教授 (ハンガリー), A. Szendrei 教授 (米国) などから, 極小クローンの研究に新たな道を拓く研究であるとして, 本研究は称賛と励ましの言葉を得ている。

今後, 本研究で得られた結果をさらに深めることにより, 例えば, 3 変数多数決関数で極小関数となるものの完全な分類を得ることが新たな, そして大きな, 研究目標となる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① H. Machida and I. G. Rosenberg, Some centralizing monoids in clone theory, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, 掲載決定。
- ② I. Chajda, R. Halas and H. Machida, Completeness of order algebras, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, Vol. 17, 2011, 93-98.
- ③ H. Machida, Commutation and centralizers in clone theory, 京都大学数理解析研究所 講究録, 査読無, Vol. 1712, 2010, 101-110.
- ④ H. Machida and I. G. Rosenberg, Endoprimal monoids and witness lemma in clone theory, *Proceedings 40th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 40, 2010, 195-200.

- ⑤ H. Machida and J. Pantovic, Maximal hyperclones on E_2 as hypercores, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, Vol. 15, 2009, 315-328.
- ⑥ H. Machida and J. Pantovic, Hyperclones determined by total parts of hyperrelations, *Proceedings 39th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 39, 2009, 161-166.
- ⑦ H. Machida and I. G. Rosenberg, On endoprimal monoids in clone theory, *Proceedings 39th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 39, 2009, 167-172.
- ⑧ H. Machida and T. Waldhauser, Majority and other polynomials in minimal clones, *Proceedings 38th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 38, 2008, 38-43.
- ⑨ L. Kwuida and H. Machida, On the isomorphism problem of concept algebras, *Proceedings of the 6th International Conference on Concept Lattices and Their Applications*, Palacky University (Czech Republic), 査読有, 6, 2008, 217-228.
- ⑩ H. Machida, On minimal clones and generating polynomials, 京都大学数理解析研究所 講究録, 査読無, Vol. 1599, 2008, 35-41.

[学会発表] (計 15 件)

- ① H. Machida, Centralizing monoids and minimal clones, 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会 “Algorithm and Computation Theory in Algebras and Languages”, 2011年2月23日, 京都大学.
- ② H. Machida, Centralizing monoids, witnesses and minimal clones (招待講演), Summer School on General Algebra and Ordered Sets, 2010年9月5日, Malenovice (チェコ共和国).
- ③ H. Machida, J. Pantovic and I. G. Rosenberg, Galois connections for hyperclones, The Fortieth International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2010年5月27日, Balcelona (スペイン).
- ④ H. Machida and I. G. Rosenberg, Endoprimal monoids and witness lemma in clone theory, The Fortieth International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2010年5月27日, Balcelona (スペイン).

- ⑤ H. Machida, Commutation and centralizers in clone theory (招待講演), 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会 “Algorithm and Computation Theory in Algebras and Languages”, 2010年2月18日, 京都大学.
- ⑥ H. Machida, Essentially minimal clones: Retrospective and prospective, 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会 “Algebra and Logic Related to Computer Science”, 2009年10月23日, 京都大学.
- ⑦ H. Machida, Endoprimal monoids, commutation and witness, Summer School on General Algebra and Ordered Sets, 2009年9月6日, Stara Lesna (スロバキア).
- ⑧ H. Machida and I. G. Rosenberg, On endoprimal monoids in clone theory, The Thirty Ninth International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2009年5月22日, 沖縄県那覇市.
- ⑨ H. Machida, Some endoprimal monoids over a three-element set, 77th Workshop on General Algebra (AAA77), 2009年3月20日, Potsdam (ドイツ).
- ⑩ H. Machida, On minimal clones and polynomials over $GF(k)$, Summer School on General Algebra and Ordered Sets, 2008年9月1日, Trest (チェコ共和国).
- ⑪ H. Machida, Minimal clones on finite fields, 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会 “Clone Theory and Discrete Mathematics”, 2008年7月30日, 京都大学.
- ⑫ H. Machida and T. Waldhauser, Majority and other polynomials in minimal clones, The Thirty Eighth International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2008年5月22日, Dallas (アメリカ合衆国).
- ⑬ H. Machida and J. Pantovic, On maximal hyperclones on $\{0, 1\}$ -- A new approach --, The Thirty Eighth International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2008年5月22日, Dallas (アメリカ合衆国), “Outstanding Paper Award” 受賞.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

町田 元 (MACHIDA HAJIME)
 国際基督教大学・大学院 アーツ・サイエンス研究科・研究員
 研究者番号: 40090534

(2) 研究分担者

山崎 秀記 (YAMASAKI HIDEKI)
 一橋大学・大学院商学研究科・教授
 研究者番号: 30108188
 (H21→H22: 連携研究者)

(3) 連携研究者

ポゴシヤン グラント (POGOSYAN GRANT)
 国際基督教大学・教養学部・教授
 研究者番号: 90234640