

機関番号：14401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540115

研究課題名（和文） 長時間リスク鋭感的ポートフォリオ最適化の非標準的設定への応用

研究課題名（英文） Study of long-term risk-sensitive portfolio optimization in non-standard settings

研究代表者

関根 順 (SEKINE JUN)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号：50314399

研究成果の概要（和文）：(1) 長時間リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題をいわゆる床制約や一般化した低下制約を設けて一般的な市場モデルの下で考察し、最適解の特徴付けを行い、最適解を計算した。(2) 同様の問題を線形ガウス型ファクターモデルを用いて取り扱い、リスク回避的設定下で、最適戦略の候補が最適でなくなる場合にも、代わりに常に nearly optimal な戦略が存在することを示した。(3) リスク回避極限に現れる微分ゲームに関する考察を行い、ゲームの鞍点から漸近的に最適な戦略を構成し、金利リスクの制御に関する結果を得た。

研究成果の概要（英文）：(1) Long-term risk-sensitive portfolio optimizations are studied under floor constraint or/and a generalized drawdown constraint with a general market model, and optimal solutions and strategies are computed. (2) A similar problem is studied with a linear Gaussian factor model, and it is shown that nearly optimal strategies always exist even if the verification of the candidate strategy fails. (3) A differential game, obtained as a risk-averse limit, is studied, and an asymptotically optimal strategy is constructed from the saddle point of the game: this strategy effectively controls interest rate risk.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：リスク鋭感的ポートフォリオ最適化、床制約、低下制約、リスク回避極限、微分ゲーム、長時間大偏差制御

1. 研究開始当初の背景

リスク鋭感的制御を、数理ファイナンスにおけるポートフォリオ動的最適化問題に応用した「リスク鋭感的ポートフォリオ最適化」の研究は、Bielecki and Pliska (1999) に始まり、その後のいくつかの研究に発展を続けていた。特に、標準的設定（完全情報下、投

資制約無し）で、線形・双線形型と呼ばれる資産価格モデルを用い長時間最適化を行った場合は、代数 Riccati 方程式と線形方程式のみで構成される最適解の簡潔な構造が明らかになっていた。この結果は、（通常困難とされる）高次元設定下での最適解の数値計算の可能性も示しており、また Davis and

Lleo の中で強調されているように最適解の経済的解釈も明快であり、実務界へも強いインパクトを持つものであった。

2. 研究の目的

ポートフォリオ動的最適化理論は、理想化された標準的設定を用いた研究から分化・発展を続けており、近年はより現実的で“非標準的”な設定を採用した研究に対する要請が高まっている。そこで、リスク鋭感的ポートフォリオ最適化の非標準的設定への適用可能性を探ることとした。リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題は、最適解がしばしば簡潔な構造を持ち数学的にも応用上も興味深い研究対象であるが、非標準的な設定への応用は未だあまり多くない。故に一層の発展が期待されるものである。

3. 研究の方法

床制約問題については有限期間の類似問題を取り扱った Jeanblanc, El Karoui, and Lacoste 等の結果を用いてその長時間漸近挙動を調べることから研究を始めた。その後最適性を特徴付ける簡潔な表現を着想し、更にこれをポートフォリオインシュランスの様々な手法と組み合わせていくことで最適解の計算が可能になった。低下制約問題の一般化については、Carraro, El Karoui, and Oboj 等が調べていた Azema-Yor 過程を用いた表現がヒントになった。これを用いて考察することで最適解の計算が可能になった。

Nearly optimal な戦略の構成は Fleming-Sheu の研究の一般化、特に証明をわかりやすく整理していく過程で、その一般化が可能になった。リスク回避極限に現れる微分ゲームの研究は、共同研究者の貝瀬秀裕氏による決定的ロバスト制御の枠組みでファイナンスの最適化問題のモデル化を行う研究がきっかけとなった。Kostas Kardaras 氏の批判的かつ協力的な提言を得る中で、確率的なモデルと決定的なモデルを繋ぐ試みを行い、Freidlin-Wentzell の大偏差理論に基づいた発見的考察をしながら、線形ガウス型モデルを用いた計算を丁寧な吟味していくことで結果が得られた。1次元非線形ファクターモデルを用いた計算は、共同研究者の畑宏明氏と以前、Cox-Ingersoll-Ross 型金利モデルを用いた類似研究を行っていたことが大きい。たまたま読んでいた Ocone による非線形フィルター(Benes フィルター)の長時間漸近安定性の研究に関連性・問題の構造の共通性を見出し、研究が始まった。

4. 研究成果

(1) 長時間リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題をいわゆる床制約を設けて取り扱った。①極めて一般的な市場モデルの下で

考察を行い、最適解の特徴付けを統一的に行った点、②床制約問題の最適解がポートフォリオインシュランスの手法を用いることで構成・計算できることを示した点、③ 線形ファクターモデルなどを用いて具体的・明示的に最適解を実際に計算して見せた点、などが興味深いと考えられる。

Jeanblanc, El Karoui and Lacoste (2005)等が提示したポートフォリオ最適化手法をポートフォリオインシュランスの手法と組み合わせる可能性を一般化・発展させた研究と位置付けられるが、彼等が取り扱っていないそのままでは取り扱いの難しい非完備市場モデルへの拡張を長時間最適化指標を導入することで可能にした点が評価されよう。

(2) 同様の長時間最適化問題を一般化した低下制約下で取り扱い、その最適解を求めた。相対低下度(relative drawdown)に関する制約を設けて行われてきた研究：

Grossman and Zhou (1994), Cvitanic and Karatzas (1995), Sekine (2006)等の拡張である。Carraro, El Karoui, and Oboj (2010)等が調べていた Azema-Yor 過程を用いた表現を用いることが鍵になっており、これを用いることで証明も大いに簡略化された。また、(1)で述べた床制約を組み合わせ最適化を図ることも可能になっている。最適解の一般的な記述と共に、線形ガウス型ファクターモデルを用いた最適解の具体的な計算も行っている。問題を有限期間範囲で取り扱うことは大変複雑であり、未だ未解決である。この点が今後の課題であるし、一方無限期間範囲問題を提示することで一般的設定下で問題を解決した点が貢献点であろう。

(3) 同様の長時間最適化問題を線形ガウス型ファクターモデルを用いて取り扱い、リスク回避的設定下での考察を推し進めた。

Kuroda and Nagai (2002)により、リスク回避度が大きくなり過ぎると、対応するエルゴード型 HJB 方程式の安定化解から構成される最適戦略の候補が最適で無くなる現象が観察されていたが、そのような状況下でも、常に nearly optimal な戦略は存在すること、したがって長時間リスク鋭感的最適成長率自体は有限であり、エルゴード型 HJB 方程式の安定化解から構成されることを示した。同様な観察は Fleming and Sheu (1999)や Hata and Sekine (2010)でも得られていたが、その証明方法の改良を行うと共に、多次元ファクターモデルへの拡張も行った。非線形ファクターモデルについて同様の考察を行うことは今後の研究課題の一つである。

(4) 線形ファクターモデルを用いた有限期間のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問

題を取り扱い、特にリスク回避的極限に関する考察を行った。特に、金利過程が確率的であり、単純なリスク回避極限では問題が崩壊(breakdown)してしまう場合に、高水準リスク回避的な最適戦略として何がふさわしいかといった点が関心の中心である。この問題に関して、ノイズの大きさに合った適当なスケーリングを取った極限を取ることで、線形・双線形型の微分ゲーム(決定的ロバスト制御)が現れることを観察した。更に、この決定的ゲームの鞍点を用いて、確率的リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の漸近的最適戦略を構成した。確率的リスク鋭感的制御問題のリスク回避的極限をとることで決定的ロバスト制御が得られることは Freidlin-Wentzell 型大偏差理論から発見的に導出され、値関数自体の収束はより一般的な設定下で今までも調べられてきた (Bensoussan and Nagai, 1992; Da Lio and McEneaney 2002; Fleming and Soner 2006 など)。本研究では、最適制御の収束も調べ、これにヒントを得て漸近的最適戦略を構成した。この戦略はロバストな性質を持ち、更に単純なリスク回避的戦略(完全安全運用戦略)よりも漸近的によりパフォーマンスを示すことなどが示されており興味深いと考えられる。確率的リスク鋭感的制御と決定的ロバスト制御の関係をより深く探ること、更なる応用、ロバスト制御を用いた経済的解釈を与えること、などは今後の課題である。

- (5) 非線形 1次元ファクターモデルで、有限期間・無限期間リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の完全な解析が可能なクラスを一つ構成した。最適化問題が可解になるようなリスク鋭感的パラメータの範囲を完全に記述できるようなモデルは1次元の極めて特殊なモデルに限られていたので、新たなクラスを提示することには意味が認められる。この完全な解析を用いて双対問題である長時間大偏差制御問題の完全な解析も行った。
- (6) 完備市場モデルを想定し、長時間大偏差制御問題に関する別解法を開発した。有限期間の quantile-hedging に関する結果を用い、最適解の漸近挙動を調べて、対数尤度に関する大偏差評価の問題へと還元する手法である。完備市場というモデル上の制約はあるものの、一方で非マルコフ型モデルの取り扱いが可能になったり、更に精密な評価(いわゆる exact large deviation 評価)も可能になるといった特徴も持つ興味深い手法と考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

- ① Hidehiro Kaise and Jun Sekine, Optimal portfolio for a highly risk-averse investor: a differential game interpretation, Risk and Decision Analysis, 査読有, (2011), In press
- ② Jun Sekine, Long-term optimal portfolios with floor, Finance and Stochastics, 査読有, (2011), In press
- ③ Hiriaki Hata and Jun Sekine, Explicit solution to a certain non-ELQG risk-sensitive stochastic control problem, Applied mathematics and Optimization, 査読有, 62(3), (2010), 341-380
- ④ Jun Sekine, A note on the risk-premium process in an equilibrium, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 査読有, 11(7), (2008), 705-716
- ⑤ Jun Sekine, Marginal distribution of some path-dependent stochastic volatility model, Statistics and Probability Letters, 査読有, 78, (2008), 1846-1850
- ⑥ Jun Sekine, On a large deviations control for a linear-quadratic model: the complete dual solution, Gakuto International Series, Mathematica Sciences and Application: Proceedings of 4th JSIAM-SIMAI meeting, 査読有, 28, (2008), 322-333

[学会発表](計17件)

- ① Jun Sekine, Long-term Optimal Portfolios with Floor, 4th Financial Risks International Forum, 2011年3月10日, Chambre de commerce et d'industrie de Paris, France
- ② Jun Sekine, Risk-sensitive Portfolio Optimization with Small-noise and Large-risk-aversion, 2011年1月20日, 5th, Bachelier Colloquium, Metabief, France
- ③ Jun Sekine, Risk-sensitive Portfolio Optimization with Small-noise and Large-risk-aversion, 2010年12月17日, International Research Forum, Polytechnic University, Hong Kong
- ④ Jun Sekine, Nearly Optimal Strategies for Risk-sensitive Portfolio Optimization on Infinite Horizon, Stochastic Processes and Their Applications, 2010年9月8日, 大阪千里ライフサイエンスビル
- ⑤ Jun Sekine, From Quantile Hedging to Large Deviations Controls with Long Horizon, AJOU Conference on Control Theory, Financial Mathematics and Financial Engineering, In honor of Professor Alain Bensoussan, 2010年7月10日, AJOU

- University, Suwon, Korea
- ⑥ 関根 順, Portfolio insurance for long-term optimal investment, 2010年2月21日, 広島大学確率論・力学系セミナー, 広島大学
- ⑦ Jun Sekine, From Quantile Hedging to Large Deviations Controls with Long-horizon”, International Workshop on Mathematical Finance “Topics on Leading-edge Numerical Procedures and Models”, 2010年2月15日, TKP-新虎ノ門ビジネスセンター, JAPAN
- ⑧ 関根 順, ポートフォリオインシュランスと長期間最適化, 科研費研究集会「数理ファイナンスとその周辺」, 2010年1月18日, 名古屋大学ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー
- ⑨ Jun Sekine, Large Deviations Controls for Long-term Investment, Workshop on Risk Measures and Robust Optimization in Finance, Research Program “Financial Mathematics”, 2009年11月19日, Institute of Mathematical Sciences, National University of Singapore, Singapore
- ⑩ Jun Sekine, Some Asymptotic Results for Probability Maximizing/Minimizing Portfolios, RIMS International Research Project “Mathematical Finance” Congress: Stochastic Analysis for and from Finance, 2009年8月10日, 京都リサーチパーク
- ⑪ Jun Sekine, Some basic aspects on dynamic utility maximization, 科研費研究集会「数理ファイナンスとその周辺」, 2009年2月23日, 九州大学西新プラザ
- ⑫ Jun Sekine, Dynamic protection of bayesian optimal portfolios, 第2回金融工学教育国際会議, 2009年1月6日, 一橋大学
- ⑬ 関根 順, 数理ファイナンスの現状に関する若干の展望と床制約を置いた長時間ポートフォリオ最適化に関する考察, 日本数学会, 2008年9月24日, 東京工業大学
- ⑭ Jun Sekine, Remarks on long-term optimal portfolios with floor, 国際ワークショップ: Finance and Related Mathematical and Statistical Issues, 2008年9月13日, 京都リサーチプラザ
- ⑮ Jun Sekine, Exponential Indifference Pricing and Hedging with Basis Risk and Partial Information for Conditionally Linear Models. The fifth colloquium on Backward Stochastic Differential Equations; Finance and Applications, 2008年6月19日, Le Mans, France
- ⑯ Jun Sekine, On the risk-premium process in an equilibrium, Workshop on Stochastics and Finance, 2008年4月21日, National University of Tsing-Hua, Taiwan
- ⑰ Jun Sekine, Risk-sensitive portfolio optimization with constraints, Seminar for

Stochastics, 2008年4月14日, Academia Sinica, Taipei, Taiwan

[図書](計1件)

① 関根 順・飯高茂・楠岡成雄・室田一雄, 朝倉書店, 朝倉数学ハンドブック[応用編], 2011 発刊予定

6. 研究組織

(1) 研究代表者

関根 順(SEKINE JUN)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号:50314399

(2) 研究協力者

貝瀬 秀裕(KAISE HIDEHIRO)

名古屋大学・情報科学研究科・助教
研究者番号:60377778

畑 宏明(HATA HIROAKI)

静岡大学・教育学部・助教
研究者番号:00609290