

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540116

研究課題名（和文）振動場ダイナミクスの多様性に挑む新たな予測手法の確立

研究課題名（英文）New approach to predict various oscillatory dynamics

研究代表者

小川 知之（OGAWA TOSHIYUKI）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：80211811

研究成果の概要（和文）：球面上の3変数の反応拡散系での振動パターンを解明するために、SO(3)対称なウェーブ分岐の標準形解析を行った。低次モードが不安定化する場合に回転波と定在波があることを明らかにし、その安定性を解析した。また、3変数反応拡散系に1-2-3モードの多重分岐が現れることを明らかにし、その標準形解析を行った。その結果、1モードの定常解がホップ的に2次分岐し、振動パターンが発生することがわかった。

研究成果の概要（英文）：Normal form for a wave instability under SO(2) symmetry is studied to understand oscillatory patterns for 3-component reaction-diffusion equations on a sphere. It turns out that there are rotating and standing waves in the case of lower mode instabilities and stabilities for both solutions are studied. Another possibilities for oscillatory patterns are also discussed. It turns out that 3-component RD system can have 1-2-3 triple modes degeneracy and its normal form was obtained. Normal form analysis shows that there is Hopf bifurcation point from 1-mode stationary solution.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：ウェーブ不安定化、反応拡散系、3重退化分岐、擬似回転波

1. 研究開始当初の背景

パターン形成は、熱対流などの流体の間

題から、動物の表皮の模様・樹林の植生マップなど生理学・生態学の問題まで幅広い分野

で興味を持たれて研究されている。数理モデルおよびその数学的な解析を通して、定常のパターン形成に関しては普遍的な理解が進んできているが、一方でより複雑な動的パターン（時空間パターン）の理解はあまり進んでいない。パターンの多様性に対して、分岐解析の結果は限られたものにとどまり、数値シミュレーションを行ってもその結果の信頼性が判断できない状況である。さて、時空間パターンが定常定常状態からの分岐として現れる事は意外にもごく最近実験サイドから報告された。それは電気化学反応の実験で、大域的な抑制効果を内在する現象に特異なものである。同様の分岐現象は化学反応の観点からも報告されウェーブ分岐として知られるようになり、国際的にもウェーブ分岐の研究が注目されつつあった。我々のグループも電気化学モデルのウェーブ分岐の構造を数学的に明らかにし、さらに実験で得られるパターンの制御にも利用できる事を議論していた。しかしながらここで得られた結果は分岐点近傍のことで、さらに $SO(2)$ 対称性を持つ場合に限定したものであった。実際に観測されるパターンの多様性を完全に理解するにはまだ不十分で更なる研究を要するという状況であった。

2. 研究の目的

本研究の基本的目的は多様な動的パターン形成の問題を詳細に理解するための大域分岐解析手法の確立と、それに基づく自己生成パターンの予測・制御である。上述した状況の中で、振動場のパターンダイナミクスに見られる局所分岐を組織的に調べ、その分岐構造を解明・予測する手法を構築することを目標にする。例えば、細胞生理学への応用が期待される、球面上でのウェーブ分岐の構造を解明する。また、非定常定常解からの振

動タイプの分岐はほとんど知られていないので、3変数の反応拡散系で可能な限りの退化した状況を検証し2次分岐としてホップ分岐が生じることがないかを確認する。実験現場では振動パターンの研究の蓄積があるので、実験/モデリング/数学のプロセスが相互にかつ即座に吟味しあえる環境を作りながら研究を進め、分岐理論の枠にとどまらない振動ダイナミクスの分岐解析手法を確立することを目指す。

3. 研究の方法

多様な動的パターン形成の問題を詳細に理解するための大域分岐解析手法の確立と、それに基づく自己生成パターンの予測・制御を行う。振動パターンが定常定常解から分岐するのは3変数以上の反応拡散系なので、そこで現れる振動分岐の標準形を現象への応用を視野に入れながら解明する。球面上のウェーブ分岐の標準形解析を行いそこで現れるパターンの解明、ウェーブ分岐以外の退化分岐として可能性のある、1-2モードおよび1-2-3モードの多重分岐の標準形解析を行う。局所分岐構造にとどまらず数値的な分岐追跡も行い、より大域的な分岐構造も理解を進める。

4. 研究成果

動的パターンの現れる振動場反応拡散系に着目しそこで起きるウェーブ不安定化による分岐解析を中心に研究を進めた。その際に解が多重ホップ分岐で生じるのでトーラス型の分岐構造の追跡が必要になる。円周上の問題の場合でも回転波だけでなく定在波や異なるモードの含まれる変調波などの擬似回転波が発生する。このようなものは $SO(2)$ 対称な不変トーラス上の軌道として現れる。これを $SO(2)$ 対称性で「割る」ことに

より、すなわち適当な進行波座標を用いることにより周期軌道として追跡が可能であることを明らかにした。さらに球面上のウェーブ不安定化の解析に必要な $S_0(3)$ 対称な標準形についてその分岐解析の研究を進めた。特に次数 1 の不安定化が生じる場合に、すべての解が球面回転波もしくは球面スタンディング波に収束すること、さらにそのどちらになるかが標準形から決定できることを明らかにした。加えて、球の対称性を崩すような摂動を与えた場合に、どのような球面回転波が選択されるかも議論した。これらのことは生理学の問題などにも関連し、フィードバックが期待されるが、まずは化学反応の振動現象と照合するべく、ガラスビーズ表面で BZ 反応の振動パターンを生成する準備を行った。ビーズ表面上に化学反応を限定することが予想外に難しく、実験設定が整ったに留まり実際の制御は今後の課題である。

また細胞極性の出現に関するモデルの定常解の分岐を調べる過程で、非一様定常解から振動解が現れることを見いだした。非一様定常解からの分岐は、非一様定常解のまわりの線形化固有値問題が単純ではないので一般には難しいが、3重退化分岐としてより一般的に捉えられることがわかってきた。このような退化分岐の新しい可能性として3変数の反応拡散系を提案した。ある種の3変数の反応拡散系では、一般に0-1-2モードの退化分岐点が発生しうるが、そこでの標準形を解析することにより非一様定常解のまわりの振動分岐が理解できることを示した。またそのまわりにカオス的な解が存在することも明らかにした。これらの結果は気象大学の奥田孝志氏と以下の論文にまとめて現在投稿中である。

Oscillatory dynamics in a reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① 小川知之、パターン形成の分岐解析(I), 応用数理, 22(1), 2012, 45-50、査読なし
- ② Y.Morita and T.Ogawa、Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of mass, Nonlinearity, 23, 2010, 1387-1411、査読有
- ③ M.Kuwamura, T.Nakazawa and T.Ogawa、A minimal model of prey-predator system with dormancy of predators and the paradox of enrichment, J. Math. Biol., 58, 2009, 459-479、査読有
- ④ T.Ogawa and T.Okuda、Bifurcation analysis to Swift-Hohenberg equation with Steklov type boundary conditions, Discrete and Continuous Dynamical Systems-A, 25(1), 273-297, 2009、査読有
- ⑤ S.Fukushima, S. Nakanishi, Y. Nakato and T.Ogawa、Selection principle for various modes of spatially non-uniform electrochemical oscillations, J. Chemical Physics, 128, 014714, 2008、査読有

[学会発表] (計7件)

- ① 奥田孝志、小川知之、反応拡散系における3重臨界点とそのまわりでのダイナミクス、日本数学会秋季総合分科会、信州大学、2011. 9. 30
- ② 小川知之、Triply degenerate interactions in 3-component reaction-diffusion system、One Forum Two Cities:Aspect of Nonlinear PDEs、2011.8.29.、国立台湾大学
- ③ 小川知之、Triple degeneracy on 3-component RD system、Reaction-Diffusion Systems: Experiments, Modeling and Analysis、2010.10.21、パリ南大学 (フランス)
- ④ 小川知之、Rotating and standing waves on sphere、AIMS International Conference

on Dynamical Systems、2010.5.27、ドレスデン工科大学（ドイツ）

- ⑤ 小川知之、0(3)対称な反応拡散系でのウェーブ分岐、日本数学会 2009 年度秋季総合分科会、2009.9.27、大阪大学豊中キャンパス
- ⑥ 小川知之、Quasi rotating waves to reaction-diffusion system、Singularities arising in Nonlinear Problems 2008、2008.12.2、京都関西セミナーハウス
- ⑦ 小川知之、Wave Bifurcation in Coupled Oscillator、International workshop on collective behaviors in bio-and bio-related systems、2008.9.3、北海道大学電子科学研究所

〔図書〕（計 1 件）

① 小川知之、サイエンス社、非線形現象と微分方程式パターンダイナミクスの分岐解析、2010、100 ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小川知之 (OGAWA TOSHIYUKI)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：80211811

(3) 連携研究者

桑村雅隆 (KUWAMURA MASATAKA)
神戸大学・発達科学部・准教授
研究者番号：30270333