

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540119

研究課題名(和文) アルキメデスタイリング相を近似結晶にもつ準周期構造の分類

研究課題名(英文) Classification of quasi-periodic structure
with local configurations of Archimedes tiling

研究代表者

小松 和志 (KOMATSU KAZUSHI)

高知大学・教育研究部自然科学系・准教授

研究者番号：00253336

研究成果の概要(和文)：非周期タイリングの局所配置を詳細に調べることにより、アルキメデスタイリングと同じ頂点周りの局所配置から成る6回回転対称性をもつ非周期タイリングの非可算種類の族を構成した。これらの非周期タイリングは特異な頂点周りの局所配置をもつ。7回回転対称性をもつ Danzer タイリングも特異な頂点周りの局所配置をもち、7回回転対称性をもつ Danzer タイリングは標準的なタイリングの列の極限状態としては得られないことが分かった。

研究成果の概要(英文)：We study details of local configurations around vertices of non-periodic tilings. We can construct an uncountable family of non-periodic tilings with 7-fold rotational symmetry which have just three kinds of local configurations around vertices in Archimedean tilings. These non-periodic tilings have singular local configurations around vertices. The Danzer tiling with 7-fold rotational symmetry has a singular local configurations around vertices. This implies that the Danzer tiling with 7-fold rotational symmetry cannot be obtained as a limit of sequence of canonical tilings.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：準周期タイリング, 数理モデル, 配置空間, 非周期

1. 研究開始当初の背景

準結晶という新しい構造をもつ物質は最初1982年にAl-Mn合金に発見されたもので、回折点が5回回転対称性を持ちます。この5回回転対称性をもつ構造の数理モデルとして、Penrose タイリングが注目されました(図1参照)。一般の準結晶構造の数理モデルが準周期タイリングとなります。2007年に高分子において(3.3.4.3.4)アルキメデスタイリン

グを近似結晶にもつ12回回転対称準結晶の構造の発見が発表されました。高分子の準周期構造の数理モデルとなりうる準周期タイリングのクラスを決定し、それらの準周期構造を分類することは急務と言えます。準周期タイリングの構成法のひとつとして射影法と呼ばれるものがあります。この射影法は高次元の周期構造からそれより低い次元の準周期タイリングを作り出すというものです。

タイリングを構成する空間とそれに双対な空間を高次元に用意して、Windowと呼ばれる双対な空間における領域を用いてタイリングの構成を制御します。発見された高分子12回回転対称準結晶構造は射影法を用いて構成されることが示唆されています。

2. 研究の目的

高分子に見られる準周期構造の数理モデルとなりうる可能性をもつ準周期タイリングのクラスを全て選定あるいは構成し、準周期構造をそれらをもつ力学系の構造により分類することを目的とします。分類のために用いる2つの力学系は、1つは有界領域上にフラクタル構造を作り出す力学系であり、もうひとつは準周期タイリングの配置空間といふべきタイリング空間をもつ力学系の構造で、タイリング力学系と呼ばれています。さらにこの2つの力学系の関係を調べていきます。

3. 研究の方法

大量の具体的な配置データに基づいて推論するという研究方法を用いて、当初は高分子の準周期構造の数理モデルとしてルート束を用いた射影法から得られる準周期タイリングを考えていたが、これだけでは不十分であることが判明したため、Substitution Rule、環状拡大による構成を試みました。Substitution Ruleでは特異な頂点周りの局所配置をもつ場合について基礎的な研究を行い、さらにその周辺のグリッドや配置空間や空間充填といった関連した内容に踏み込みました。環状拡大による構成では実際にアルキメデスタイリングに現れる局所配置をもつ非周期タイリングを構成を目指しました。有界領域上にフラクタル構造については1次元の準周期タイリングであるフィボナッチ列について最初に調べ、より一般化することを目指しました。各テーマにおいて複数名の担当による共同研究体制ができる次のような役割分担を行ないました。

代表者の小松は数理モデルの決定、問題設定の方向づけにおいて中心的な役割を果たしてゆく。後藤氏には物理化学の見地から問題設定、数理モデルの妥当性についての検討をお願いする。

Windowのフラクタル構造の解析については、小松を中心に、加藤氏、秋山氏の3名で担当する。

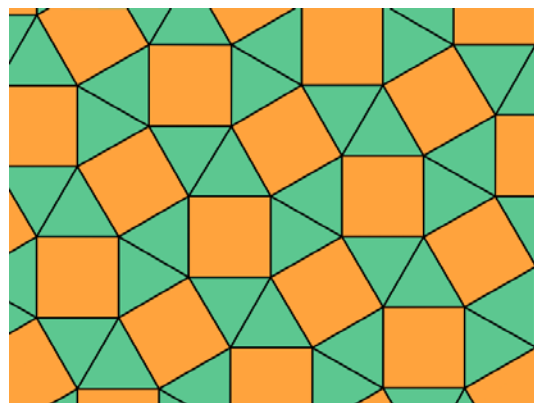
準周期タイリングの複雑度を調べることについては、小松、野間口氏の2名で担当する。

タイリング力学系のスペクトル解析は、

秋山氏を中心に、小松、中野氏の3名で担当する。

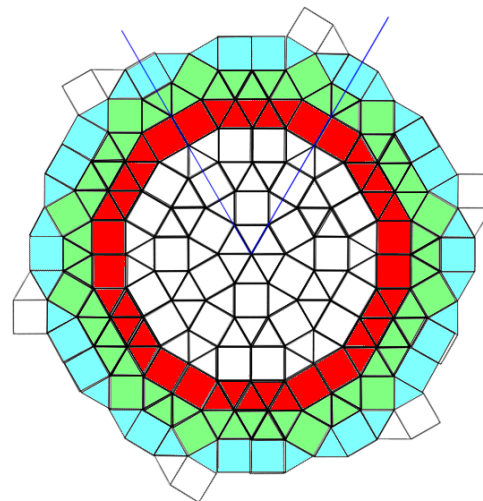
Windowのフラクタル構造とタイリング力学系の関係は、小松、秋山氏、中野氏で担当する。

推論の助けとなる配置データの作成は小松が主に担当する。大学院生にサポートをお願いする。

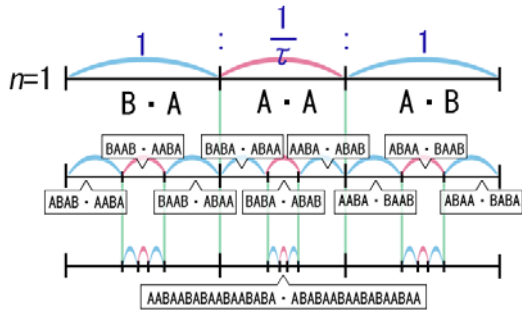


4. 研究成果

(1) 下図の(3.3.4.3.4)アルキメデスタイリングに現れる局所配置を用いて、環状拡大という構成法により6回回転対称性をもつ非周期タイリングを構成した。さらにこの手法を応用して次の図のような6回回転対称性をもつ非周期タイリングの同型類を非可算無限個、構成することができた。



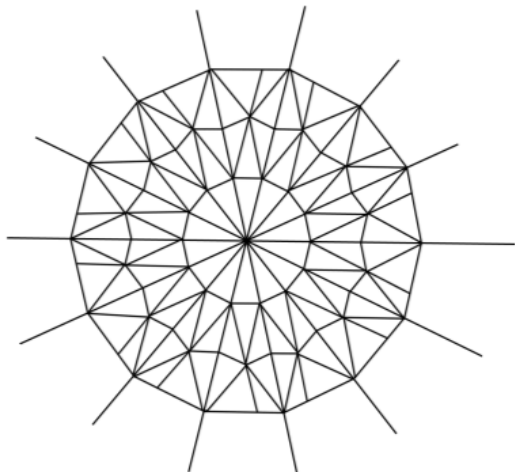
(2) フィボナッチ列は1次元の準周期タイリングである。このタイリングは射影法と呼ばれる構成法によっても得られる。タイリングの局所配置を調べることにより、構成を制御するWindowと呼ばれる有界集合はフィボナッチ列の自己相似性に対応するフラクタル構造をもつ(下図参照)



これが部分的には2次無理数の設定の1次元の準周期タイリングまで拡張されることを示した。

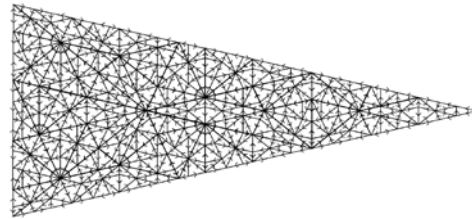
(3) 固体物理の実際の準結晶構造において回転対称性をもつものが特に重要であると考えられている。7重回転対称性をもつ Danzer タイリング (下図) があるが、その局所配置を詳細に調べることにより、Penrose タイリングとの比較を行ない、substitution rule という構成法のもつべき条件について調べた。

7重回転対称性をもつ Danzer タイリングはタイリングの列の極限状態としては得られないことを示した。これは5重回転対称性をもつ Penrose タイリングとは異なる性質である。不純物のように捉えられる特異な局所配置を唯一箇所にだけ、Danzer タイリングは持ち得ることが判明した。さらに、この結果が境界強制性と呼ばれる性質と深く関係していることを示した。



(4) Substitution Rule によりタイリングを構成する定式化には2つがあるが、そのうちのひとつはあまり調べられていない。詳細を調べることにより、射影法により構成される1次元の準周期タイリングの場合と同様にタイリングの族が有界領域によりパラメータ付けされてさらにその有界領域に自己相似性のような構造を与えることが分かった。

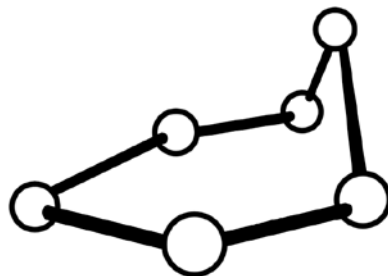
この構造は既知の力学系と関係することが期待される。



(5) グリッドと呼ばれる平行線の族を準周期タイリングよりも広い対象であるパラログラムタイリングにおいて構成する方法を定式化した。準周期タイリングの代表的な例であるペンローズタイリングではアンマン棒というグリッドが構成されることが知られているが、パラログラムタイリングとはタイルが平行四辺形であるという条件だけが課されており、対象を大きく広げている。定式化した方法で得られるグリッドの非周期性から元のタイリングの非周期性が導ける。また、ペンローズタイリングにおいて適用した場合にはグリッドから元のタイリングが復元されることも示された。

(6) 3次元のタイリングである空間充填について、等面菱形多面体による空間充填の分類問題に取り組み、等面菱形多面体の空間充填不可能な組み合わせを調べ上げ、さらに等面菱形多面体と平行六面体による空間充填を含めて、周期的なタイリングについて、等面菱形多面体が一番密に配置される空間充填を調べた。

(7) 分子の立体構造を調べるために、 n 個の環状炭化水素分子の数理モデルを与え、その配置空間のトポロジーを研究した。以前に設定した数理モデルとして満たすべき条件に見直しを行ない、配置空間の形の決定するための直接的な証明を与えた。(図は $n=6$ の場合の臨界点の環状分子の立体構造)



またパラメータを単純化し、コンピュータによるシミュレーションにおける計算量を軽減することが可能になった。 $n=5, 6, 7$ の場合

には多様体の構造をもち、その微分同相型も決定される。n=8 の場合には n=5, 6, 7 の場合とは状況が異なる 2 つの配置をもつことが判明した。さらに従来の結果を拡張して、n=5, 6, 7, 8 の場合に配置空間として球面をもつためのボンドアングルの十分条件を調べた。

(8) ユークリッド平面の場合と同様に、双曲平面タイリングにおいて考えられる非周期性の 4 つの定義の関係をフックス群に関して知られている結果を用いて完全に明らかにした。非周期双曲平面タイリングの具体例はあまり構成されていないが、これを用いてさらに数多く非周期双曲平面タイリングの具体例を環状拡大という構成法により構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① 林浩子, 小松和志, Some observations on a substitution rule with singular vertex configurations, Research Institute for Mathematical Science Kokyuroku, 査読無, Vol. 1725, 2011, pp.125-130

② 小松和志, 中野史彦, A substitution rule for the Penrose tiling, Nihonkai Math. J., 査読有, Vol. 19, 2008, pp.111-135

③ 加藤和久, 小松和志, 中野史彦, 野間口謙太郎, 山内昌哲, Remarks on 2-dimensional quasiperiodic tilings with rotational symmetries, Hiroshima Math. J., 査読有, Vol. 38, 2008, pp.385-395

[学会発表] (計 10 件)

① 林浩子, 小松和志, Some observations on a substitution rule with singular vertex atlases, Mathematics of quasi-periodic order, 2010 年 6 月 22 日, 京都大学数理解析研究所

② 林浩子, 小松和志, 中野史彦, Notes on vertex atlas of planar Danzer tiling, The 7th Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, 2009 年 11 月 11 日, 金沢市文化ホール

③ 林浩子, 小松和志, 中野史彦, Notes on vertex atlas of planar Danzer tiling II, 高知タイル貼り小研究集会 2009, 2009 年 10 月 26 日, 高知大学

④ 山内 昌哲, 小松和志, Remarks on 2-dimensional quasiperiodic tilings with rotational symmetries II, 高知タイル貼り小研究集会 2009, 2009 年 10 月 26 日, 高知大学

⑤ 小松和志, 中野史彦, Substitution Rule

から得られるタイリング, 射影法から見た準周期構造と関連する話題, 2008 年 10 月 2 日, 京都大学数理解析研究所

⑥ 小松和志, 射影法入門 II, 射影法から見た準周期構造と関連する話題, 2008 年 10 月 2 日, 京都大学数理解析研究所

⑦ 小松和志, 射影法入門 I, 射影法から見た準周期構造と関連する話題, 2008 年 10 月 1 日, 京都大学数理解析研究所

⑧ 小松和志, 環状化合物がとることができる立体構造の配置空間 (1) 配置空間の数理解析モデルである多様体のトポロジー, 日本コンピュータ化学会 2008 秋季年会, 2008 年 9 月 28 日, 高知大学,

⑨ 林浩子, 小松和志, 射影法から導かれる区間の両側分割, 小研究集会: 準周期タイリング及びその関連する話題, 2008 年 6 月 20 日, 高知大学

⑩ 小松和志, 環状分子の立体構造の配置空間のトポロジー (分割という視点から), 小研究集会: 準周期タイリング及びその関連する話題, 2008 年 6 月 20 日, 高知大学

[図書] (計 1 件)

小松和志 他, エヌ・イー・エス出版, トポロジーデザイン---新しい幾何学からはじめる物質・材料設計---, 2009, pp.59-71

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小松 和志 (Komatsu Kazushi)

高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
研究者番号: 00253336

(2) 研究分担者

秋山 茂樹 (Akiyama Shigeki)

新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号: 60212445

後藤 了 (Goto Satoru)

国際医療福祉大学・薬学部・准教授
研究者番号: 50253232

加藤 和久 (Kato Kazuhisa)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授
研究者番号: 20036578

(H20: 研究分担者、H21: 連携研究者)

野間口 謙太郎 (Nomakuchi Kentaro)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授
研究者番号: 60124806

(H21→H22: 連携研究者)

(3) 連携研究者

中野 史彦 (Nakano Fumihiko)

学習院大学・理学部・教授
研究者番号：10291246