様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　３月２２日現在

機関番号：１７６０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540122
研究課題名（和文）　反応拡散方程式の大域的解構造と縮約系についての研究

研究課題名（英文）　Study on the global structure of the stationary solutions of Reaction diffusion equation and its limiting system

研究代表者
辻川　亨（TSUJIKAWA TOHRU）
宮崎大学・工学部・教授
研究者番号：10258288

研究成果の概要（和文）：自然現象を記述するいくつかの移流項をもつ非線形反応拡散方程式について、パターン形成の観点から、拡散係数などのパラメーターに関する定常解の構造を明らかにした。分岐理論により、定数解から空間非一様な定常解が分岐することを示した。
　フィードバック効果による BZ 化学反応系の実験により観察される三日月型進行パターンに対応する解の存在をある種の極限方程式を解析することで示した。

研究成果の概要（英文）：From the viewpoint of pattern formations, we show the structure of stationary solutions depending on the parameter, for example, diffusion coefficients. The bifurcation theory is applicable to prove the existence of non constant solutions. To show the existence of a traveling solution corresponding to a propagating arc-like segment which is observed in the experiment of BZ reaction system with feedback, we study some kind of the limiting system to the reaction diffusion equation.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：応用数学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：非線形偏微分方程式、非平衡力学系

１．研究開始当初の背景
生物モデルとして頻繁に扱われる反応拡散方程式の理論的解析は日本では 1970 年代から始まったといえる。この方程式は非線形であるため従来の方法を直接適用することができない。そのため、解析手段として分岐理論、特異摂動法、相平面法など様々なものが開発研究されてきた。一方、計算機の普及によりモデルのビジュアル化も活発となり、現象の解明に拍車が掛かってきた。
反応拡散方程式のなかでも、1970 年代後半から、たとえば Keller-Segel モデルなどの移流項を含む方程式の研究が始まった。また、1990 年頃から類似の方程式である三村と辻川による走化性モデル（1993）、Ertle のグループによる金属触媒反応モデル（1998）等の理論解析が行われてきた。特に、時間大域解および指数アトラクタの存在、また定常解の存在とその安定性などが研究されている。

２．研究の目的
●移流項を含む 2 変数反応拡散方程式

走化性モデル（CG モデル）：走化性を有する生物の個体群密度の時間・空間変化を記述したモデルである。走化性とは、ある種の化学物質の濃度勾配に依存して生物が移動(集合)する性質であり､昆虫や菌類に多く見られる。特に、ある種の細胞性粘菌について、Budrene と Berger(Nature,1991) は増殖と移動が同じ時間スケールで観察出来ることを示した。
金属触媒反応モデル（AD モデル）：金属表面上での白金触媒による気体分子の反応現象（CO+O－＞CO_2）を記述したモデルである。金属表面の一次相転移に対する自由エネルギーを汎関数として与え、金属表面の構造変化と気体分子の反応による現象を記述している。
Ⅰ．CG モデルについて
（１）数値計算により示された２次元進行波解の存在（三叉構造と棒状構造を持つもの)、走化性パラメーター k に関する進行波解の速度依存性（1 次元進行フロント解、三叉構造を持つ進行波解と異なり棒状パターンでは単調性がない）の解明
（２）数値計算により示された２次元矩形領域での定常パターンの不安定化のメカニズムの解明：k が増加するとき、ストライプパターン→ドットを含むストライプパターン→ドットを含む動的スネーキーパターン→ランダムな動的ドットパターン
（３）(２）の結果に関連して、１次元領域での数値計算による結果の解明：k が増加するとき、多重遷移層を持つ定常パターンは単調に遷移層の数を増やしていくが、あるところで、遷移層の数が時間的に増減する現象
Ⅱ．AD モデルについて
（１）モデルが持つ力学系の構造解明：
①1 つの拡散係数が十分小さい場合、対応する縮約系の導出、2 次元定常周期パターンの存在と安定性
② 他方の拡散係数が十分大きい場合､対応する縮約系の導出、2 次元定常周期パターンの存在と安定性、力学系の観点から見たときの定常解を結ぶ軌道の存在
Ⅲ．CG モデルと AD モデルの共通問題
数値計算により得られた、六角形、矩形、ストライプ、ドットなどのパターンの存在を、大域的な分岐構造により解明する。
拡散が小さい場合、一般に双安定な反応拡散方程式では相分離現象が起こり、遷移層が出現する。特に対面する遷移層の相互作用により､パターン全体が支配される場合がある。遷層の領域を曲線とみなす単純化により、曲線の動きを支配する方程式を導出し、相互作用についてのメカニズムを解明する。
移流項の係数が大きい場合、スキームの不安定化により数値計算ができなくなる。この問題を解消するため新たなスキームを開発する。
ベロゾフ・ザボチンスキー反応（BZ モデル）
Ⅳ．一般に BZ 反応系において､定常パターンの存在は知られていないが、Showalter のグループは光照射によるフィードバック効果から三日月型進行波解の存在を実験と数値計算で示した。同グループの櫻井との共同研究で実験と数値計算により、三日月型パターンの形状と進行速度についての光依存性を示した。この現象を理論的に解明するため､Mikhailov と Zykov によりスパイラルパターンの存在を示すために導入された Kinematic 方程式を用いる。ただし、彼らの境界条件では安定な三日月型パターンの存在を示すことができないので、新たな境界条件を提案する。
一般的な曲線の運動という観点から、端点を持つ有限の長さの曲線について解析可能な境界条件を導入する。

３．研究の方法
平成２０年度：
CG モデルの数値計算により得られた棒状及び三叉構造を持つ進行波解の存在を示すための前段階として、それぞれのパターンに見られる枝状部分の動きを支配する方程式を求める。そのため、研究目的Ⅲ（１）で示した帯状パターンから大きくずれたスネーキーパターンの界面を２つの曲線で表現することで、界面同士の相互作用を記述するための空間全体の場を決める方程式を求める。そのため、Mikhailov と Zykov の方法である２つの界面がある意味強い相互作用（同じ一定曲率）を持つと仮定することで、問題を単純化する。この方法により界面の速度と安定性を考察する。一方、方程式の２つの拡散係数が十分小さく、界面が十分離れている場合も、適切な縮約系を導入して２つの界面の相互作用を明確にする。
CG モデルの数値計算により、１次元領域で走化性の効果を示すパラメーターを大きくするとき、多重遷移層を持つ定常パターンの遷移層の数は単調に増加して安定に現れることを示した。しかし、ある値から遷移層の数が時間的に増減する現象が観察される。西浦のグループは､Gray-Scott モデルについてパルスが分離してその数があるところまで単調に増加する現象を分岐構造により示した。このアイデアを参考に複数の遷移層を持つ定常解の存在とその定常解の不安定多様体を構成し、最終的にはこれらの多様体の結合構造（2 つの定常状態を結ぶ軌道の存在等)を決定する。大域的な分岐構造を求めることは難しい問題であり、まず AUTO により数値的に求める。
AD モデルについて、１つの拡散係数が小さい場合に対応する縮約系を CG モデルと同様の方法により求める。これを用いて２次元軸対称定常解の存在とその安定性を議論することができる。一方、他の拡散係数が十分大きい場合、Shadow System と呼ばれるもうひとつの縮約系が得られる。この場合、積分によ

る束縛条件の下での単独方程式の問題に帰着される。空間多次元の問題については変分法を用いて解の存在を示す。

CG モデルについて、数値計算結果により、さまざまな定常パターンがパラメーターを変化させることで出現することを示した。特に走化性の強さと増殖の大きさをパラメーターとして 2 次元パターンの分岐図を完成させる。一方、Crandarll-Rabinowiz 流の分岐理論によるストライプ構造などの単純分岐について調べる。また、数値計算で得られていない入れ子構造を持つような解の存在も考察する。

走化性の効果を強くするとき、ストライプパターンがはじめに静的な不安定化を起こし、ドットを含むストライプパターンへと変化する。これは定常解の線形化固有値問題の負の固有値が正になることに対応していると考えられる。しかし、動的スネーキーパターンへの変化は単純に Hopf 分岐であるかどうかを予想することは難しい。また 2 次元領域での 2 次分岐であるため、AUTO などで数値的に検証することはできない問題である。

平成２１年度：

BZ 反応系に対して、光フィードバック効果により進行三日月型パターンの存在を実験とオレゴネーターモデルの数値計算により Showalter のグループが示した。また、理論的な立場から、Zykov と Showalter は Karma が用いた方法により特殊な場合（別の反応拡散方程式で速度の遅い進行波解）の近似解を構成した。この進行波解の存在を Zykov が提唱した Kinematic 方程式を用いて示し、実験及び数値計算結果と比較する。この場合、パターンを２つの端点を持つ有限の長さの曲線として近似する。一方、進行スポットパターンの存在は定常パルス解からの分岐現象として扱われる場合があるが、遅い速度の解しか捉えることができない。また、ここで扱う三日月型パターンは軸対称解とは大きく異なる形状を持つもので、分岐現象として捉えることも難しい。

曲線の運動については、閉曲線、無限の長さを持つものなどについての研究は進んでいる。また、端点を持つ曲線の運動についてもその境界条件を含め Mikhailov と Zykov、Elikin のグループなどが考察している。しかし有限の長さを持つ曲線の運動の例である三日月型進行波解に対応するものについては成功していない。そこで、一般に端点を持つ有限の長さの曲線の運動について、まず境界条件を考察する。

20 年度の研究を受けて、数値計算で得られた棒状及び三叉構造を持つ数値解の形状、縮約系から求めた枝部分及び結節点近傍での支配方程式をもとに、接合漸近展開法を用いて近似解を構成し進行波解の存在と棒状進行波解の速度がパラメーター k について単調でないことを示す。

平成２２年度：

これまで用いてきた数値計算スキームは、本質的には空間変数に関しては有限要素法、時間変数については陰的 Runge-Kutta 法である。しかし、最適なスキームとは言えず、計算可能なパラメーター範囲に限界がある。一方、永井と中木は Keller-Segel モデルに対する計算スキームを開発した。この方法の適応範囲を検証しながら考察する問題に有用な差分スキームを求める。また、このスキームを用いて計算を行うことで、拡散係数が十分大きい場合、生物モデルに見られる動的なパターンが出現しないことも示す。

CG モデルの時間大域解の存在は、増殖項が２次のオーダーで減少する場合、例えば $f(u) = u(1-u)$、に示した。一方、Keller-Seger モデルのように増殖項を持たない系では初期値、領域の次元等に依存して非有界な解（爆発解を含む）が存在することが知られている。そこで、増殖項が $f(u) = -u$ の場合に解の時間に関する有界性を調べる。

AD モデルでは、実験で得られた進行パルス解の存在を示すことができない。そこで、モデル方程式の再検討を行う。

４．研究成果

平成２０年度：

１．フィードバックを考慮した BZ 化学反応系における実験で観察された三日月型進行パターンに対応するものを微分方程式の解として求める。一般に 2 次元領域での反応拡散方程式系の進行波解の存在を示すことは困難であるため、方程式の極限系である曲線の運動を記述するキネマティック方程式を考察した。これにより、パラメーター制御に関して数値計算と実験の結果が定性的に一致していることを示した。

２．CG モデルについて、有界区間での移流と増殖係数をパラメーターとして定常解の存在とその線形化安定性を示した。また、AUTO により複数のピークを持つ定常解の大域的構造も明らかにした。

３．Kuznetsov のグループにより提唱された（1994）ある種の樹木を幼年期と青年期に分類して、森林の成長メカニズムを解明するためのモデル方程式（FK モデル）を扱う。2 次元有界領域において方程式の定数解の安定性、成木の死亡率をパラメーターとしたときの、空間非一様解の非存在を示した。また、ある状況では無限に多くの不連続解が存在することも示した。

４．写真や文字などの図形の劣化したデーターに対して、濃淡の境界を際立たせるエッジ抽出のための１つの方法として外力と曲率に

より駆動する曲線運動を提唱した。濃淡を外力とすることで曲線の定常状態が求める図形となることを数値計算により示し、この方法の有効性を検証した。

平成２１年度：

１．AD モデルについて

（１）有界区間において、反射境界条件のもと移流係数が十分大きい場合の定常解の存在を考察するため、その係数を無限大にした場合の縮約系を導入した。一方の拡散係数を分岐パラメーターとして定数解から分岐した解が境界層を持つ特異摂動解につながるという大域的な定常解の解構造を示した。また、定常解の存在について、方程式に含まれるパラメーターの依存性を調べた。

（２）２次元平面において吸着分子の密度が高い領域の境界（界面）の動きを記述する縮約系を形式的に導出した。特に高密度領域が帯状に近い場合、2 つの界面は平行位置の摂動として扱うことができる。これにより、界面の動きは平面進行波の速度、界面の曲率と積分で表示される２つの界面の相互作用を含む方程式で記述されることを示した。また、特異摂動法により拡散係数が小さい場合、２つの平面進行波解が存在することも示した。

２．２次元有界領域で反射境界条件の下、FK モデル方程式の解の漸近挙動を調べる。そのため方程式から得られた力学系において 3 種類の包含関係のあるオメガ極限集合を導入した。リアプノフ関数を用いて、成木の死亡率が高い場合に 3 つのオメガ極限集合は一致して零解のみからなること、また L^2-オメガ極限集合は平衡解のみから構成されることも示した。

平成２２年度：

AD モデルについて、数値計算から空間２次元矩形領域でいくつかの定常及び非定常パターンの存在をすでに示した(Takei, Tsujikawa and Yagi,(2005))。この事実を踏まえて、定常パターンについての理論的な結果を得た。

2 次元有界領域が滑らかな境界をもつとき、金属表面の状態を記述する方程式の拡散係数について

（１）拡散係数が臨界値より大きい場合、最大値原理を用いて拡散係数に関する解の一様有界性を示し、定数解を除いて正値定常解が存在しないことを証明した。

（２）（１）で示した臨界値より拡散係数が小さい場合、Leray-Schauder の写像度理論により空間非一様な定常解の存在を示した。空間次元が１の場合、この結果は定数解からの分岐現象に対応している。

これにより、拡散係数をパラメーターとした場合の正値定常解の大域的構造が部分的に解明された。

また、金属表面上の気体分子の吸着密度の時間変化を記述するもう１つの方程式の拡散係数が大きい場合、空間非一様な定常解の存在も示した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① Massimo Grossi, Hiroshi Ohtsuka, and Takashi Suzuki, Asymptotic non-degeneracy of the multiple blow-up solutions to the Gel'fand problem in two space dimensions, Advances in Differential Equations, 査読有, 16, 2011, 145-164

② K. Kuto and T. Tsujikawa, Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model I: Existence, Discrete Conti. Dynam. Systems, 査読有、B14, 2010, 1105-1117

③ Hiroshi Ohtsuka, Tonia Ricciardi, and Takashi Suzuki, Blow-up analysis for an elliptic equation describing stationary vortex flows with variable intensities in 2D-turbulence, J. Differ. Equ., 査読有, 249 ,2010, 1436-1465

④ S.-I. Ei and T. Tsujikawa, The dynamics of weakly interacting fronts in an adsorbate-induced phase transition model, Kybernetika, 査読有、45, 2009, 625-633

⑤ K. Kuto and T. Tsujikawa, Shadow system for adsorbate-induced phase transition model, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有、B15, 2009, 1-14

⑥ L. H. Chuan, T. Tsujikawa and A. Yagi, Stationary solutions to forest kinematic model, Glasgow Math. J., 査読有、51, 2009, 1-17

⑦ M. Bene\v s, M. Kimura and S. Yazaki, Second order numerical scheme for motion of polygonal curves with constant area speed, Interfaces and Free Boundaries, 査読有、11, 2009, 515--536

⑧ T. Sakurai, K. Osaki and T. Tsujikawa, Kinematic model of propagating arc-like segments with feedback, Physica D, 査読有、237, 2008, 3165-3171

⑨ N. Kurata, K. Kuto, K. Osaki, T. Tsujikawa and T. Sakurai, Bifurcation phenomena of pattern solution in Mimura-Tsujikawa model in one dimension, Mathematical Sciences and Applications, 査読有、29, 2008,

265-278

⑩ M. Benes, M. Kimura, P. Paus, D. Sevcovic, T. Tsujikawa and S. Yazaki, Application of a curvature adjusted method in image segmentation, Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica, New series, 査読有, 3, 2008, 509-524

⑪ Hiroshi Ohtsuka and Takashi Suzuki, Local property of the mountain-pass critical point and the mean field equation, Differential Integral Equations, 査読有, 21 , 2008, 421-432

〔学会発表〕（計 11 件）

① T. Tsujikawa, Bifurcation structure of stationary solutions for the reaction-diffusion-advection system, 第 28 回九州における偏微分方程式研究集会、九州大学、2011 年 1 月 26 日

② S. Yazaki, Numerical study on Hele-Shaw flows in a time-dependent gap, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics at Lecture Hall CVUT at Telc, Czech Republic , 2010 年 9 月 3 日

③ T. Tsujikawa, Stationary patterns of a reaction-diffusion-advection system”, Czech-Japan Seminar in Applied Mathematics 2010, Czech Technical University in Prague, 2010 年 8 月 30 日

④ 大塚浩史, 点渦系とその平均場について, 日本数学会 2010 年度年会, 函数方程式論分科会（特別講演), 神奈川, 2010 年 3 月 25 日

⑤ Hiroshi Ohtsuka, Blow-up analysis for an elliptic equation describing stationary vortex flows with variable intensities in 2D-turbulence, The 7th East Asia PDE Conference, Hong Kong, China. 2009 年 12 月 17 日

⑥ 矢崎成俊, 曲率流方程式の数値計算について, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会（応用数学分科会), 大阪大学豊中キャンパス ,2009 年 9 月 27 日

⑦ T. Tsujikawa, Bifurcation structure of steady states in the shadow system for the adsorbate-induced phase transition model, Conference on “Evolution equations, Related Topics and Applications” HelmholtzZentrum munichen, Germany, 2009 年 9 月 10 日

⑧ T. Tsujikawa, Stationary solutions of an adsorbate-induced phase transition model, 首都大学東京「数理解析セミナー」、2009 年 3 月 9 日

⑨ T. Tsujikawa, Stationary solutions of shadow system for an adsorbate-induced phase transition model, 研究集会「自己相似構造と自己組織化に関する漸近解析」数理解析研究所、2008 年 9 月 18 日

⑩ T. Tsujikawa, Global structure of stationary solutions of shadow system for adsorbate-induced phase transition model, Czech-Japan Seminar in Applied Mathematics 2008, Miyazaki University, 2008 年 9 月 7 日

⑪ Hiroshi Ohtsuka, Local property of the mountain-pass critical point and the mean field equation, The 5th East China Partial Differential Equations Conference, Nanjin, China, 2008 年 7 月 8 日

〔図書〕（計 2 件）

① 辻川 亨、移流効果を伴う反応拡散モデルのパターン形成、学会誌「応用数理」Vol. 19, No. 4, 2009, 9-20

② S. Yazaki, An area-preserving crystalline curvature flow equation, Topics in mathematical modeling, Part 4, Jindrich Ne\v cas center for mathematical modeling lecture notes (eds: M. Bene\v s and E. Feireisl), volume 4, matfyzpress, ISBN 978-80-7378-060-9, 2008, 169-215

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

辻川　亨（TSUJIKAWA　TOHRU）
宮崎大学・工学部・教授
研究者番号：10258288

(2)研究分担者

大塚　浩史（OHTSUKA　HIROSHI）
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：20342470

矢崎　成俊（YAZAKI　SHIGETOSHI）
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：00323874

(3)連携研究者

中木　達幸（NAKAKI　TATSUYUKI）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50172284

栄　伸一郎（EI　SHINICHIRO）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：30201362