様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 6 月 6 日現在

機関番号：３２６０７
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008～2010
課題番号：20540127
研究課題名（和文）ポリオミノとポリイアモンドを用いたアイソヘドラルタイリングの研究

研究課題名（英文）Study of Isohedral tilings by polyominoes and polyiamonds

研究代表者
福田　宏　（FUKUDA HIROSHI）
北里大学・一般教育部・准教授
研究者番号：70238484

研究成果の概要（和文）：ポリオミノまたはポリイアモンドを基本領域とするアイソヘドラルタイリングの研究をおこなった．アイソヘドラルタイリングの対称性１７通りのうち，3, 4, 6 回割の回転対称軸をもつ８通りの対称性 **p3, p31m, p4, p4g, p6, p3m1, p4m, p6m** について，アイソヘドラルタイリングを全て列挙するアルゴリズムを研究し，コンピュータによってあまり大きくないポリオミノまたはポリイアモンドについて全て列挙した．

研究成果の概要（英文）：We described computer algorithms that produce the complete set of isohedral tilings by n-omino or n-iamond tiles in which the tiles are fundamental domains and the tilings have 3-, 4-, or 6-fold rotational symmetry. The symmetry groups of such tilings are of types **p3**, **p31m**, **p4**, **p4g**, and **p6**. There are no isohedral tilings with symmetry groups **p3m1**, **p4m**, or **p6m** that have polyominoes or polyiamonds as fundamental domains. We display the algorithms' output and give enumeration tables for small values of n.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	400,000	120,000	520,000
2010 年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総　計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：離散幾何学

１．研究開始当初の背景

アイソヘドラルタイリング，ポリオミノとポリイアモンド：タイリングとは，合同なタイルによって平面（空間）を重なりも隙間もなく充填することである．タイリングされた平面が，回転，平行移動，鏡映などの等長変換 σ によって変化しないとき，タイリングは対称性 σ をもつという．あるタイリングのすべての対称性の集合は群をなす．アイソヘドラルタイリングとは，任意の２つのタイルを対称性によって重ねることができるタイリングである．

アイソヘドラルタイリングは，2 方向に周期のある，最も規則的な，構造のよくわかったタイリングである．ここで，ある方向に周期があるとは，その方向に平行移動の対称性があるということである．平行移動の対称性があれば，その方向に繰り返し，つまり周期が生じるのである．

ポリオミノとは，ドミノ倒しのドミノに由来する平面図形で，正方形を辺と辺，頂点と頂点が重なるように接合した図形である．同

じように，ポリイアモンドとは，ダイアモンドに由来する平面図形で，正三角形を辺と辺，頂点と頂点が重なるように接合した図形である．ポリオミノ（ポリイアモンド）を構成する正方形（正三角形）の数をそのサイズという．サイズ n を明示するときは，ポリオミノを n オミノ，ポリイアモンドを n イアモンドという．ポリオミノやポリイアモンドは，離散数学の研究などで，一般の図形では扱いが難しい場合に対象とされる基本的図形である．

タイリングの研究は，結晶構造解析のために世紀に始まった．現代的タイリング問題の出発点は 1900 年の国際数学者会議でヒルベルトが提起した「非アイソヘドラルタイルは存在するか」という問題である．非アイソヘドラルタイルとは，タイリングはできるが，決してアイソヘドラルタイリングはできないタイルである．

ヒルベルトは，タイリングはすべて規則的であり，その構造は単純であろうと考えていたが，非アイソヘドラルタイルが Heesch によって発見され，その後次々に，自明でない構造のアイソヘドラルでないタイリングが発見された．アイソヘドラルではないタイリングの存在によって，タイリングの研究は予想外に難しいものになっている．例えば,「与えられた凸多角形が平面をタイリングできるかどうかを判定する」ことさえ未解決の問題である．

タイルをポリオミノやポリイアモンドに限定すると，問題が若干やさしくなることは想像に難くない．実際，ポリオミノを使った様々なタイリングの問題が提起されている．例えば,「与えられたポリオミノが平面を周期的にタイリングすることができるかどうか判定する」問題は未解決である. 一方, 1999 年に K. Keating と A. Vince は,「与えられたポリオミノがアイソヘドラルタイリング可能かどうかを判定する」問題を解いた．

２．研究の目的

アイソヘドラルタイリングがもつすべての対称性を使って，対称操作で重なる点を同一とみなすと，平面全体は有限の大きさの領域に収縮する．この領域を基本領域という．基本領域は，形は様々にとることができるが，面積は一定である．

アイソヘドラルタイリングのタイルの面積は，基本領域の面積より必ず大きい．その意味で，タイルの面積最小のアイソヘドラルタイリングは，アイソヘドラルタイリングの中でも最も基本的なものである．そこで，以下では，タイルの面積が基本領域の面積に一致するアイソヘドラルタイリングを基本アイソヘドラルタイリングと呼ぶことにする．

本研究では，ポリオミノ，ポリイアモンドによる基本アイソヘドラルタイリングを，対称性を指定して，サイズの小さい順にもれなく探索，列挙し，数え上げるアルゴリズムを研究し，コンピュータによる探索プログラムを作成する．対称性によっては，タイルとして数通りの図形しか許されない場合もあると予想される．それらについては，計算は不要で，定理の形でまとめることができるかも知れない．

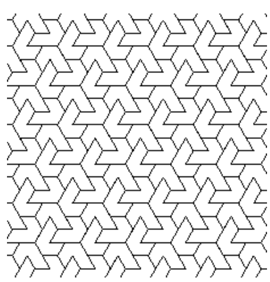
３．研究の方法

3 方向の周期をもつ対称性の群を空間群という．230 個の空間群は，結晶の対称性を分類するために固体物理学では必須の知識である．次元を落とした，2 方向の周期をもつ対称性の群を「平面の空間群」という．平面の空間群は 17 個あるが，この事が証明されたのは比較的最近の 1960 年代である．

先に，アイソヘドラルタイリングは必ず 2 方向の周期をもつことを述べたが，これは，アイソヘドラルタイリングの対称性が，17 個の平面の空間群のいずれかであるということを意味する．平面の空間群は，次のヘルマン・モーガンの記号で表される．

p1，p2，pm，pg，cm，pmm，pmg，pgg，cmm，p4，p4m，p4g，p3，p3m1，p31m，p6，p6m

これらの群の要素は，2 方向の独立な平行移動の他には，鏡映(mirror)，回転と，鏡映と並進を同時に行う映進(glide)である．2π/n[rad]の回転を n 回割の回転という．ヘルマン・モーガンの記号で，数字 2，3，4，6 はその数字の回転割の回転対称性があることを示す．m は鏡映，g は映進対称性がある事を表す. p1 は 2 方向の独立な並進の他には何の対称性も含まない群である．図は 6-イアモンドの p3 基本アイソヘドラルタイリングである．



研究は，これら 17 個の群に対して，順番にひとつづつ進めてゆく．まず最初に，3 回割り以上の回転対称性をもつ p4，p4m，p4g，p3，p3m1，p31m，p6，p6m について，ポリオミノ，ポリイアモンドの基本アイソヘドラルタイリングの研究を完成させる．

次に，残る 8 個の群の研究にとりくむ．8

個の群はさらに，直交する並進対称性と 2 回割の回転対称性をあわせ持つものと，そうでないものに分けられる．前者は，結晶類 D_2 に属す pmm，pmg，pgg，cmm の 4 つである．

４．研究成果

3 回割り以上の回転対称性をもつ平面の空間群 G

p4，p4m，p4g，p3，p3m1，p31m，p6，p6m

について，順に以下の結果を述べる．

(1)対称性 G をもつ n オミノまたは n イアモンドの基本アイソヘドラルタイリング．その個数 S_n とそのようなタイリングを生成する合同なタイルの個数 S_n’．

(2)仮にタイルの点対称性を無視した場合，具体的には，タイルに非対称なモチーフを描いた場合の n オミノまたは n イアモンドの基本アイソヘドラルタイリング．これを擬似基本アイソヘドラルタイリングと呼ぶ事にする．擬似基本アイソヘドラルタイリングの個数 N_n とそのようなタイリングを生成する合同なタイルの個数 N_n’．

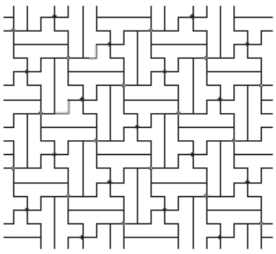
p4：p4 基本アイソヘドラルタイリング及び擬似基本アイソヘドラルタイリングは，サイズ

$n=(x^2+y^2)/2$, x, y= 0,1,2,⋯

すなわち，

n=1,2,4,5,6,9,10,13,16,17,18,20,25,26,29,32,34,36,37,40,41,45,49,⋯

のポリオミノで可能であり，ポリイアモンドでは不可能である．図は 5 オミノによる p4 基本アイソヘドラルタイリングである．



表は，n≦10 に対する，探索結果である．

p4 *n*-ominoes

n	1	2	4	5	8	9	10
N_n	1	1	3	12	45	82	300
S_n	0	0	2	9	38	77	296
N'_n	1	1	3	8	45	80	277
S'_n	0	0	2	7	38	76	275

p4m：**p4m** 基本アイソヘドラルタイリング及び擬似基本アイソヘドラルタイリングはポリオミノに対してもポリイアモンドに対しても存在しない．

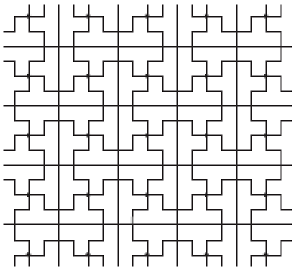
p4g：**p4g** 基本アイソヘドラルタイリング及び擬似基本アイソヘドラルタイリングは，サイズ

$n=x^2$, x=1,2,⋯

すなわち，

n=1,4,9,16,25,36,49,64,⋯

のポリオミノで可能であり，ポリイアモンドでは不可能である．図は 4 オミノによる **p4g** 基本アイソヘドラルタイリングである．

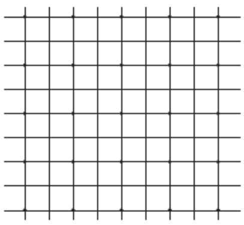


表は，n≦16 に対する，探索結果である．

p4g *n*-ominoes

n	1	4	9	16
N_n	1	3	26	596
S_n	0	2	25	595
N'_n	1	3	26	596
S'_n	0	2	25	595

なお，**p4g** 擬似基本アイソヘドラルタイリングは，正方形を格子状に並べた図のようなタイリングしか存在しない．



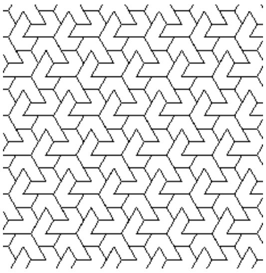
p3：**p3** 基本アイソヘドラルタイリング及び擬似基本アイソヘドラルタイリングは，サイズ

$n=2(x^2+y^2+xy)/2$,　x, y= 0, 1, 2, …

すなわち，

n=2, 6, 8, 14, 18, 24, 26, 32, 38, 42, 50, 54, 62, 72, 74, 78, 86, 96, 98, …

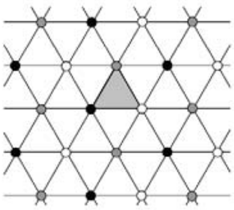
のポリイアモンドで可能であり，ポリオミノでは不可能である．図は 6 イアモンドによる p3 基本アイソヘドラルタイリングである．



表は，n≦14 に対する，探索結果である．

p3 n-iamonds				
n	2	6	8	14
N_n	1	4	7	306
S_n	0	1	6	294
N'_n	1	4	7	288
S'_n	0	1	6	277

p3m1：p3m1 基本アイソヘドラルタイリングはポリオミノに対してもポリイアモンドに対しても存在しない．p3m1 擬似基本アイソヘドラルタイリングはポリオミノに対しては存在しないが，ポリイアモンドに対しては，図のように正三角形のタイルを辺と辺を接合して並べたサイズ $n=k^2$，k=1, 2, 3, …のもののみ存在する．



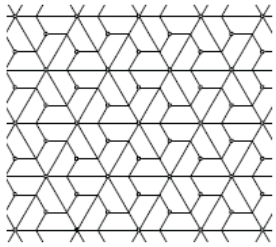
p31m：p31m 基本アイソヘドラルタイリングは，サイズ

$n=3x^2$，x=1, 2, 3, …

すなわち，

n=3, 12, 27, …

のポリイアモンドで可能であり，ポリオミノでは不可能である．また及び擬似基本アイソヘドラルタイリングはポリオミノでもポリイアモンドでも存在しない．図は 3 イアモンドによる p31m 基本アイソヘドラルタイリングである．



表は，n≦12 に対する，探索結果である．

p31m n-iamonds		
n	3	12
N_n	1	20
S_n	1	20
N'_n	1	20
S'_n	1	20

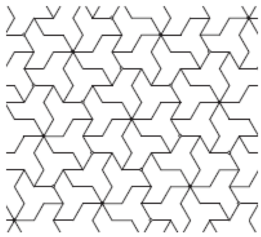
p6：p6 基本アイソヘドラルタイリング及び擬似基本アイソヘドラルタイリングは，サイズ

$n=x^2+y^2+xy$,　x, y= 0, 1, 2, …

すなわち，

n=1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, 31, 36, 37, 39, 43, 48, 49, …

のポリイアモンドで可能であり，ポリオミノでは不可能である．図は 7 イアモンドによる p6 基本アイソヘドラルタイリングである．



表は，n≦12 に対する，探索結果である．

p6 n-iamonds						
n	1	3	4	7	9	12
N_n	1	1	3	20	29	195
S_n	0	1	2	19	28	194
N'_n	1	1	3	16	27	191
S'_n	0	1	2	16	26	190

p6m：p6m 基本アイソヘドラルタイリング及び擬似基本アイソヘドラルタイリングはポリオミノに対してもポリイアモンドに対しても存在しない.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）
①“Three-Body Choreographies in Given Curves”Hiroshi Ozaki, Hiroshi Fukuda and Toshiaki Fujiwara, J. Phys. A42, 395205(16pp) (2009).（査読有）

②“Enumeration of Polyominoes, Polyiamonds and Polyhexes for Isohedral Tilings with Rotational Symmetry” Hiroshi Fukuda, Nobuaki Mutoh, Gisaku Nakamura, and Doris Schattschneider, Lecture Notes in Computer Science 4535, 68--78 (Springer, 2008).（査読有）

③“Universal Measuring Boxes with Triangular Bases”, Jin Akiyama, Hiroshi Fukuda, Chie Nara, Toshinori Sakai, and Jorge Urrutia, American Mathematical Monthly 115 No.3, 195--201 (2008)（査読有）

〔学会発表〕（計４件）
① The China-Japan Joint Conference on Computation Geometry, Graphs and Applications, Dalian, China, November 3--6, 2010. Session 2A:（11:00--12:00, November 3),“Polyominoes and Polyiamonds as Fundamental Domains of Isohedral Tilings for Crystal Class D_2” Hiroshi Fukuda, Chiaki Kanomata, Nobuaki Mutoh, Gisaku Nakamura and Doris Schattschneider.

② The 7th Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, Kanazawa, Japan, November 11--13, 2009. Session 5A: Tiling and Packing (16:20--18:00, November 11),“Symmetry of Isohedral Tilings of Polyominoes and Polyiamonds as Fundamental Domains” Hiroshi Fukuda, Chiaki Kanomata, Nobuaki Mutoh, Gisaku Nakamura and Doris Schattschneider.

③ The 7th Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, Kanazawa, Japan, November 11--13, 2009. Session 7B: Physics-Motivated Geometry and Graph Theory (11:00--12:00, November 12),“Fixed Center of Mass Configurations of Three Points in Given Curves”, Hiroshi Ozaki, Hiroshi Fukuda and Toshiaki Fujiwara.

④ The internatonal Bogolyubov conference "Problems of theoretical and mathematical physics" To the 100th anniversary of N. N. Bogolyubov's birth: August 21-27, 2009, Moscow-Dubna, Russia. 18:20 -- 18:40, Aug 24, Monday;“Three-Body problem on Given Curve”, H. Ozaki, H. Fukuda and T. Fujiwara

〔図書〕（計２件）
① 伊藤大雄・宇野裕之編著，離散数学のすすめ，
福田宏，中村義作，第 11 章『ゴスパー曲線とその一般化』pp.152--167, (現代数学社 A5 版 330 頁, 2010 年 5 月 15 日初版 1 刷)

② 福田宏，中村義作，離散数学のすすめ 15『ゴスパー曲線とその一般化』，理系への数学 第41巻第6号通巻498号, pp. 55--60,（現代数学社 2008）

６．研究組織
(1)研究代表者
福田　宏（FUKUDA HIROSHI）
北里大学・一般教育部・准教授
研究者番号：70238484

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし