

機関番号：23901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540128

研究課題名（和文） 複合ポアソンノイズ汎関数の確率解析と応用

研究課題名（英文） Generalized functionals of Compound Poisson noise and its applications

研究代表者

SI SI(シイ シイ)

愛知県立大学・情報科学部・准教授

研究者番号：70269687

研究成果の概要（和文）：全般的な研究方針としては、ランダムな複雑系の扱いに、帰納的な方針から、独立変数の系を構成し、その関数として与えられた系を表現することを第一とした。表現に用いられる関数は独立確率変数であるため、特別な解析法が要求される。変数として選ばれるのは、ガウス型のホワイトノイズ、またはポアソン型のノイズである。初年度は特にポアソン型のを詳しく研究した。これについては、知られていないことが多く、複合ポアソン型のとき、統計で最近注目されてきたベキ分布との関係とその安定過程への埋め込みに新しい方法を提唱した。また、そのようなノイズの対称性も重要な観点であることがわかった。

ついで、2年目以後、ガウス型のホワイトノイズとの関連、複雑系の解析法における役割の分担などに目を向けた。両者は、それぞれ無限次元の回転群と対称群とで特徴づけられるが、それらの表現をつうじての研究には興味深いものをみることができた。

なお、発展として、空間変数をパラメータとするノイズの重要性の認識を得たことは予想外の成果であった。

研究成果の概要（英文）：Our general purpose of our research is to determine the structure of random complex system by appealing to the method of reduction; namely, we construct a system of independent random variables from the given system, which is to be represented by functions of those independent variables. We know two basic systems fitting for our purpose : one is a Gaussian white noise and the other is Poisson noise.

A Poisson noise, in particular, a compound Poisson noise requires us to have profound surveys, so that we have obtained their invariances under transformations groups, dualities between the two noises and others.

As a related topic, we have discovered significance of the roles played by the noise with the parameter that comes from the intensity.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
20年度	1,000,000	300,000	1,300,000
21年度	900,000	270,000	1,170,000
22年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：ホワイトノイズ、ポアソンノイズ、複合ポアソンノイズ、応用数学、Hida distributions、双対性

## 1. 研究開始当初の背景

ランダムな複雑系は独立確率変数系の関数として考えられ、その関数の微分積分を行うのがひとつの有効な解析の方法と考えられる。この場合独立変数系としては素である(ガウス型)ホワイトノイズとポアソンノイズが典型である。ガウス型のときはよく知られているがポアソン型のときは見かけと違って、その特性を見つけることや、解析法について研究すべきことが多く残されている。

ポアソン型のノイズを変数とする汎関数の解析も、これまで相当進んできたが、ガウス型の場合との類似の面が多い。汎関数の作るヒルベルト空間とその直和分解であるフォック空間、エルミート関数による汎関数の展開など、ポアソンの場合も形を変えて登場し、類似の役割を果たしている。しかし同じではない。たとえば、シャリエ多項式も直交多項式としてはエルミート多項式と同様ではあるが、相違点も認めなければならない。微分作要素などの線形作要素についても同様である。すなわちポアソンノイズの場合ガウス型のとくと同様に基本とするものはポアソン過程 $P(t)$ の時間微分であるポアソンノイズになる。この汎関数の扱いではガウス型と類似の面もあるが、本質的に違ったいくつかの特性をもつため、汎関数についても固有の確率解析を進めることが重要である。

このような目標の達成のために、申請が準備している手法は次の二つになる。

(1) 超汎関数。扱う汎関数の変数が各時点で独立なシステムである(見かけ上)連続無限個の変数系であるため、したがって、その関数も超汎関数となる。基礎として、通常の超汎関数論を用いる。

(2) ノイズの不変性を記述する変換群がある。無限次元位相群であるが、ポアソンのときは無限対称群が対応し、調和解析を実行することができる。

## 2. 研究の目的

(1) 本研究においては、ポアソンノイズの特性に重要な未開発の部分があり、それを理論的に見つけ出すことを試みる。これまでに、時間区間有限などのいくつかの制限のもとで、最適性(最大情報量)と対称性を見出して数学的に記述してきた。さらにガウス型のノイズと比較することにより、

新しい不変性などを明らかにしたい。比較に当たっては両ノイズの有限次元近似を見ることが有効と思われる。

(2) 次に比較する手法は、対応している位相群のユニタリ表現をみることである。回転群に対しては、近似の段階および無限次元回転群の場合、知られていることが多い。特にある部分群を有限次元回転 $SO(n)$ の射影極限とみたとき、ユニタリ表現も含めて進んだ研究がある。複素化したユニタリ群も同様である。そこでは有限次元で近似できるものが多く登場するが、対称群のときも含めて有限次元的なものでは近似できない、真に無限次元的なものを追及したい。そして、これとは異質なものを、すなわちパラメータ空間の微分同型の作る1-パラメータ部分群をいくつかとりあげる。共形変換群と同型なものもここに現れる。このような部分群をさらに豊富なものにしたい。

(3) 回転群がガウス型に対応すれば、ポアソンノイズには対称群が対応する。有限次元対称群 $S(n)$ の既約表現は複雑でそのままでは、確率の話に移らない。しかし、極めて特殊な表現をとって、その射影極限を考えると、 $n$ と同時に表現空間も無限次元にすると好都合である。ここで、ホワイトノイズ解析における超汎関数空間の部分空間が登場するので、両ノイズ比較の一つの方法となるであろう。これを確かめ、さらに一般化をしたい。

(4) その上で、無限次元調和解析としてのポアソンノイズ汎関数の確率解析を進めたい。古典関数解析の成果を利用することは、ガウス型のとくと同様であるが、相違点に注意したい。すでに知りえたこととして、線形汎関数のとき、その表現に特徴的な相違が出た。それを非線形な汎関数として表される確率過程や確率場の場合に拡張したい。

(5) 2種類のノイズの比較とそれらの汎関数解析法とを見るとき、そこに、dualityのあることに気づく。これは、上記(1)の結果からも推察されることである。

[註] Dualityについては、京都大学 数理解析研究所の小嶋泉助教授からもご指摘をいただいた。たとえば空間を広げてレヴィーラプシアン $\Delta_L$ の adjoint  $\Delta_L^*$  を考えて、対応

$$\Delta_L \longleftrightarrow \Delta_L^*$$

に意味を与えた。

最近、京都大学の小島先生のグループと双対性についての共同研究のための具体的な計画を立てることができたので、早急に実行に移したい。

(6) 以上の研究は、単に数学的な理論面だけに注目するだけでなく、たとえばベキ乗分布の扱いに諸分野からの関心が集まっていることにも注目するなどさまざまな角度からヒントを得るようにしたい。これは複合ポアソンノイズの解析のよい応用例である。このように、応用面からの問題提起にも注意していきたい。

### 3. 研究の方法

ポアソンノイズの汎関数の解析、特に調和解析とその応用について研究する。

#### (1) ポアソンノイズ自体の研究

申請者はすでにポアソンノイズの確定のために、その特性について論じたのを Effective determination of Poisson noise, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Prob. And Application, Vol.6 pp. 609-617, 2003.

これをさらに深めるために、ポアソンノイズの確率分布の有限次元近似を行い、その射影極限を求める段階で、この分布の持つ最適性などを研究している。まだ preprint の段階であるが、これを論文の形にまでもっていくことが最初の課題である。

#### (2) ポアソンノイズと対称群

上の2003年の論文での手法、すなわちポアソン過程のジャンプ数による標本空間の分割を用いて、その特性を探し出すとき、対称群  $S(n)$  が現れる。その既約ユニタリ表現が、ノイズの汎関数の扱いに役立つ筈である。特殊な表現ではあるが、 $n$  を無限大にした射影極限において、いわゆる Hida distribution が自然な形で現れる。群と表現空間とを同時に極限に持っていくところがポイントである。すでに論文として Poisson noise, infinite symmetric group and stochastic integral based on  $\dot{B}(t)^2$  : を書いた。これを補足改良して、論文とする。

群論については、無限対称群の指標についての Vershik (ロシア) の結果を発展させるが、この群の表現に関しては本研究の協力者との共同研究で実現できる予定である。またホワイトノイズのベキとポアソンノイズとの関連は、すでに Accardi 教授 (ローマ

大学) と研究連絡を続けている。

#### (3) ポアソンノイズ汎関数

ポアソンノイズの線形汎関数として表現される確率過程は、よく知られたガウス過程のホワイトノイズによる表現と並行して議論できるが、時間についての因果性を保つ標準表現の問題で大きく違ってくる。確率場の場合も含めて、線形表現については、すでに著書 : T. Hida and Si Si, An innovation approach to random fields, World Scientific Publ, 2004. において論じている。結論としてどのような確率過程からノイズ、すなわち innovation が構成できるかという最も基本的な問題へのアプローチになっている。この考えを非線形な場合に拡張したいが、マルチンゲールについては多少の結果がある。より一般的な場合を研究したい。

(4) (1)~(3)を総合した研究は対称群の調和解析としてみることも可能である。現時点でこの立場から総括する。

#### (5) 応用として、ベキ乗分布の情報論的研究

いわゆるベキ乗分布は安定分布の domain of attraction に属する。言い換えれば、ベキ乗分布は安定分布で近似される。また、多くの例では、この分布が現れる元の偶然現象は、同じタイプの分布に従う独立試行の積み重ねとみなされる。このことから、問題の分布が安定過程の一時点での分布と考えてよいことがわかる。その過程は複合ポアソン過程であり、その性質は素な要素であるポアソンノイズの特性と、その複合法を組み合わせて知ることができる。理論とともに具体例にあたることも必要で、現在、多摩大学情報社会学研究所で開催されている「自己創発パタン研究会」に毎月出席し、講演と実例の検討を行っている。今後も出来るだけこの会に参加していく予定である。

### 4. 研究成果

全般的な研究方針として、ランダムな複雑系の研究法として Reduction をとりあげた。ランダムな系から独立な確率変数の系システムを構成し、その関数として与えられた系を表現することを第一とした。

表現に用いられる関数は独立確率変数であるため、その解析には特別な方法が要求され

る。変数として選ばれるのは、ガウス型のホワイトノイズ、またはポアソン型のノイズである。初年度は特にポアソン型のものを詳しく研究した。関数解析的手法としては、当面のランダムな関数に S-変換を施し、関数解析の手法が有効に用いられるようにした。ポアソン型のノイズの関数については、知られていないことが多かったが、S-変換の効果で多くの有用な結果を得た。複合ポアソン型るとき、最近統計で注目されるようになったベキ分布との関係も明らかにし、その安定過程への埋め込みに新しい方法を提唱した。

また、そのようなノイズの対称性も重要な観点であることがわかった。

ついで、2年目以後、上記の結果とガウス型のホワイトノイズの対応する結果との関連、それらの複雑系の解析法における役割の分担などに目を向けた。両者は、それぞれ無限次元の回転群と対称群とで特徴づけられるが、それらの表現を通じての研究には興味深いものを発見することができた。

なお、これらの結果の発展として、空間変数をパラメータとするノイズの重要性の認識を得たことは予想外の成果であった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Si Si、L'evy の安定過程からベキ乗分布へ、Proceeding of Symposium on History of Mathematics、Research center of Computational Math. Science、Tsudajuku University、No. 32、pp.136-145、2011.
- ② Si Si、Multiple Markov Generalized Gaussian processes and their dualities Infinite Dimensional Analysis、Quantum probability and Related Topics World Scientific Publ. Co.、pp.99-110、2010.
- ③ T. Hida and Si Si、Class II semi-subgroups of the infinite dimensional rotation group and associated Lie algebra、Recent Advances in Stochastic Dynamics and Stochastic Analysis、Interdisciplinary Mathematical Sciences Vol. 8、World Sci. Publ. Co.、pp.177-184、2010.
- ④ Si Si and Win Win Htay、Duality arising from Multiple Markov Gaussian Processes、Quantum Bio-Informatics III QP-PQ Vol 26、World Sci. Publ.、pp.317-326、2010.
- ⑤ Si Si、and T. Hida、Some aspects of generalized white noise functionals. QP-PQ24、Quantum Bio-Informatics II. ed.

- L. Accardi, et. al. (eds) 、 World Scientific Pub. Co.、pp.184-191、2009.
- ⑥ T. Hida, T. Shimizu and Si Si、Gaussian systems、Volterra Center Publication、No. 608、pp1-14、2008.
  - ⑦ Si Si、Realizations between Gaussian and Poisson noises、International workshop on Micro-Macro Duality in Quantum Analysis、RIMS 1609、pp.214-222、2008.
  - ⑧ T. Hida, Si Si and T. Shimizu、The B(t)' s as idealized elemental random variables、Volterra center Notes、N.614、2008.
  - ⑨ T. Hida, Si Si and T. Shimizu、Dualities in white noise analysis and applications、Volterra center publication、N.620、2008.
  - ⑩ Si Si、Duality between Gaussian and Poisson noises、Quantum Bio-Informatics II QP-PQ Vol 21、World Scientific Pub. Co.、pp.266-272、2008.
  - ⑪ L. Accardi, Si Si and Win Win Htay、T-transform of Hida distribution and factorization、Volterra center publ.、N.625、pp.1-14、2008.
  - ⑫ Si Si、確率超過程と超汎関数、Proceeding of Symposium on History of Mathematics、Research center of Computational Math. Science、Tsudajuku University、No.29、pp.261-271、2008.
  - ⑬ Si Si、Some applications of Hida distribution to biology、Collective Dynamics : Topics on Competition and Cooperation in The Bioscience、A selection papers in the Proceedings of BIOCAMP International Conference 2008、pp.344-351、2008.

[学会発表] (計 8 件)

- ① T. Hida, Si Si、空間・時間・ノイズ、量子科学における双対性とスケールシンポジウム、数理解析研究所、2010年11月4日.
- ② Si Si、Levy の安定過程からベキ乗分布へ、数学史シンポジウム、津田塾大学、東京、2010年10月9日.
- ③ Si Si、Discrete approximation to operators in white noise analysis、International Conference on Quantum Information and Bio-information、Tokyo Science University、2010年3月9日.
- ④ Si Si、ガウス型超過程の多重マルコフ性に現れる双対性、量子科学における双対性とスケールシンポジウム、数理解析研究所、2009年11月4日.
- ⑤ Si Si、Multiple Markov generalized Gaussian processes、International

Conference on Stochastic Analysis and Applications, Tunis, 2009年8月12日.

- ⑥ Si Si, Duality arising from Multiple Markov Gaussian Processes、International Conference on Quantum Information and Bio-information, Tokyo Science University, 2009年3月9日.
- ⑦ Si Si, Duality arising from Multiple Markov Gaussian Processes、QBIC 国際会議、東京理科大学、2009年3月6日.
- ⑧ Si Si and T. Hida、T-transform and S-transform on the space of generalized white noise functionals、数理解析と非可換解析とミクロ・マクロ双対性の研究会、京都大学数理解析研究所、2008年10月30日.

[図書] (計1件)

- ① T. Hida and Si Si, Lectures on white noise functionals, World Scientific Pub. Co., 2008, pp.266.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

SI SI (シイ シイ)

愛知県立大学・情報科学部・准教授

研究者番号：70269687