

機関番号：32660
 研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2008～2010
 課題番号：20540137
 研究課題名 (和文) ある種の遅れを持つ関数微分方程式の数値計算と定性的性質について
 (英文) Stability and numerical analysis for delay differential equations
 研究代表者
 石渡 恵美子 (ISHIWATA EMIKO)
 東京理科大学・理学部・准教授
 研究者番号：30287958

研究成果の概要 (和文)：

本研究期間中に、ある種の関数微分方程式や数理生物モデルに関して、次の成果が得られた。まず、定数遅れの非線形差分方程式の平衡解の大域漸近安定性を新たに示した論文や、比例遅れの積分微分方程式の選点法の誤差に関する論文が掲載された。一方で、ウィルスの感染伝播を表す代表的な離散型モデルの時間遅れを持つ場合について、平衡点に対する永続性の十分条件の導出過程を見出した投稿論文が良い評価を得て掲載されている。

研究成果の概要 (英文)：

We obtained some results related to the functional differential equations by this grant. We first derived new global stability conditions for a class of difference equations with time delay. Next, we showed an attainable order of collocation methods for delay differential and Volterra integral equations with proportional delay. Super attainable order was also considered. Finally, we considered some global stability for epidemic models with time delay. Using a discretization of combined explicit with implicit schemes, we obtained the global dynamics of a discretized SIRS epidemic model with time delay, corresponding to that of continuous model.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数値解析

科研費の分科・細目：4103

キーワード：遅延微分方程式, 数値解析, 大域安定性, 数理生物モデル

1. 研究開始当初の背景

数理生態学などに現れる時間項に遅れを持つ微分方程式は、遅れを含まないものより

環境変動の影響なども表せる、より現実に近いモデルとして用いられており、これらの解の定性的理論に関して非常に多くの論文が発表されている。特に最近では、現実社会で非

常に深刻な問題となっている鳥インフルエンザなどのウィルスの感染と伝播を表すモデルとして適用され、感染の広がりを防ぐ意味でも定性的性質を解明することが重要なテーマとして取り上げられている。

一方で、比例的遅れを持つパンタグラフ方程式は、方程式の形状が単純にもかかわらず、時間項に遅れを含んだ途端に解の挙動が大きく異なってしまいう難しさがある。この方程式は初期点で遅れの情報が完全に消去されるため、病理モデルに現れる定数遅れの方程式と同じ計算法は適用できない。そこで1980年代以降、Volterra積分微分方程式とともに数値解法の提案や分点の選び方の改良、誤差解析や解の数値的安定性に関する研究が急速に展開されてきた。しかしながら、これらが国内で議論されることはほとんどない。比例的遅れを持つ積分微分方程式については、イタリアに研究者が多く、2006年の国際ワークショップでは、主催者のナポリ大学の先生方を中心に、招待講演者が欧州の若手研究者と精力的に共同研究を進めている場面に遭遇した。

前者の数理生物モデルの遅延微分方程式については、申請時に特に国内で研究集会が盛んに開催され、また日本と中国の多くの研究者が中心となって、国際的な数理生物コロキウムを隔年で開催していた。あわせて申請当時、研究代表者は別タイプの数理生物モデルに由来する離散可積分系に関する共同研究にも着手し始めている。

2. 研究の目的

主に数値解析の研究が行われている時間項に比例的遅れを持つ微分方程式に対し、近年では、解の大域漸近安定性の理論的な性質も注目されている。数理生物学に現れる時間項に定数遅れを持つ微分方程式の定性的性質の共同研究に携わってきた研究代表者は、両者の特徴を見直すことによって、安定的な数値計算法の提案や改良にも寄与できると考えられる。そこで、今まで行ってきた、選

点法のスキームの改善や達成精度の検証を続けると共に、これらの研究の第一人者であるH. Brunner教授が示していたVolterra積分微分方程式の解の定性的性質に関する未解決問題にも取り組む。一方で、社会的にもインフルエンザの大流行などが話題になっている病理モデルや数理生物モデルについて、その定性的な性質の解明を、特に離散型モデルに着目しながら進める。

3. 研究の方法

研究代表者は2000年前後から、比例的遅れを持つ微分方程式に対して、予測と数値実験を繰り返すことで問題点を浮き彫りにし、誤差の達成精度の改善と理論の一般化を行ってきた。引き続き、最新の文献を調べつつ、検証を行う。また、インフルエンザ大流行の危機感から、定数遅れの微分方程式に対する解析が研究集会で多く取り上げられている。参加して情報収集を行いつつ、別件の共同研究者である早稲田大学の室谷教授からもアドバイスを受け、主に数値実験や整理を大学院生（既卒）が行い、拡張点について議論を繰り返しながら、論文を書き進めている。

一方、申請当時に開始した離散可積分系に関する共同研究は、研究代表者にとっては初めての領域のため、研究打合せを積極的に行うことで内容の理解を深め、問題点の整理、解決を繰り返してきた。主に共同研究者の博士後期課程の大学院生に数値実験やアルゴリズムの導出を進めてもらっているが、証明など理論的な側面は、打合せで徹底的に議論を重ねることで、未解明な部分を突破している。その成果として、論文も続々と掲載されており、これからも同様なやり方で、共同研究を積極的に継続する。

4. 研究成果

2008年度は無限の区分的遅れを持つ非線形微分差分方程式の平衡解の大域漸近安定性に関する論文が *J. Comput. Appl. Math.* に掲載された(5. [雑誌論文] ③)。引き続き、複数遅れを持つ非線形差分方程式に対する結果 (Y. Muroya, E. Ishiwata, N. Guglielmi, *J. Math. Anal. Appl.*, 334, 2007) を別の問題に応用し、十分条件を拡張して投稿論文を準備した(最初に投稿した際、投稿先の雑誌の主旨にあわず不採録だったため、現在、投稿先を再検討中)。

また、遅延微分方程式を研究するきっかけを与えてくれたBrunner教授の呼び掛けによって開催された2007年暮れの香港でのワークショップのproceedingsの論文が掲載された(5. [雑誌論文] ④, ⑤)。さらに、比例的遅れを持つ微分方程式の超達成精度に関する論文もBrunner教授との共著で掲載されている(5. [雑誌論文] ⑦)。

2008年からは、数理生物学の中でも感染症の伝播に関するモデルの定性的性質について研究を進めている。時間に定数遅れを含む微分方程式、特にウィルスの感染伝播を表す病理モデルの定性的性質については、昨今の鳥だけでなく新型のインフルエンザの大流行という現実的な状況も伴って、国内外で研究集会が多く開催されている。特に2010年には、2年毎の日中生物数学コロキウムが北京で開催されたため、参加して研究交流を図り、以下に述べる離散化の工夫を応用することで得られた形式解に関するポスター発表を行った。現在、このコロキウムにおけるproceedings論文を投稿中である。

病理モデルの定性的性質に関する研究は連続型モデルに関するものがほとんどであり、離散型モデルに関しては与えられていない。従来の離散型では正值性が保持されず、安定性の議論ができないが、従来の離散化と異なるわずかな工夫を行うことで正值性を保つことができ、連続型モデルに対して用いられている大域安定性の条件を示す手順とほぼ同様に、離散型モデルの安定性も導けることが大

学院生との共同研究によって解明された。これは数少ない離散型モデルに関する成果として重要な意味を持つ。具体的には、独特の離散化による離散型SIRSモデルの時間項に定数遅れを持つ場合について、感染症が持続しない場合の平衡点の大域漸近安定性ならびに持続する場合のパーマネンスの十分条件を導いた共著論文が *J. Math. Anal. Appl.* に良い評価を得て掲載された(5. [雑誌論文] ①)。これまでに得られた独自の離散化の工夫をワクチン投与を考慮したモデルにも適用、同様に持続性や大域安定性を示した論文を投稿し、2010年度の終わりにrevisionを提出済みである。

さらに、代表的な数理生物モデルであるロトカ・ボルテラ系の中で、複数の捕食者・被食者をもつハングリータイプと呼ばれる可積分系の離散型モデルに対し、その漸化式の時間発展が、ある帯行列の複素固有値計算アルゴリズム(dhLV アルゴリズム)として導かれることを近年、共同研究によって示している(5. [雑誌論文] ⑥)。2010年度はこのアルゴリズムの収束性について、中心多様体を利用した論文が掲載されたり、他のモデルと固有値計算アルゴリズムとの関連性についても発表した(5. [雑誌論文] ②)。引き続き、他の離散可積分系から別タイプの固有値計算アルゴリズムを導出し、dhLV アルゴリズムとの関連性まで明示した共著論文を投稿準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

- ① Masaki Sekiguchi, Emiko Ishiwata, Global dynamics of a discretized SIRS epidemic model with time delay, *J. Math. Anal. Appl.*, 査読有, 371, 2010, 195-202
- ② Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki, Yoshimasa Nakamura, On the

qd-type discrete hungry Lotka-Volterra system and its application to the matrix eigenvalue algorithm, *JSIAM Letters*, 査読有, 1, 2009, 36-39

③ Yoshiaki Muroya, Emiko Ishiwata, Stability for a class of difference equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 査読有, 228, 2009, 561-570

④ Yoshiaki Muroya, Emiko Ishiwata, Nicola Guglielmi, New global stability conditions for a class of difference equations, *Front. Math. Comp.*, 査読有, 4, no,1, 2009, 131-154

⑤ Emiko Ishiwata, Yoshiaki Muroya, On collocation methods for delay differential and Volterra integral equations with proportional delay, *Front. Math. Comp.*, 査読有, 4, no,1, 2009, 89-111

⑥ Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki, Yoshimasa Nakamura, The discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalues, *Inverse Problems*, 査読有, 25, 2009, 015007

⑦ Emiko Ishiwata, Yoshiaki Muroya, Hermann Brunner, A super-attainable order of collocation methods for differential equations with proportional delay, *Appl. Math. Comp.*, 査読有, 198, 2008, 227-236

[学会発表] (計13件)

① Dai Okada, Masaki Sekiguchi, Emiko Ishiwata, Global dynamics of a discretized SIRS epidemic model with time delay and its applications, 3rd China-Japan Colloquium of Mathematical Biology (CJCMB3), Sea North Green Garden - Beijing, China, Oct. 18-21, 2010 (poster)

② 関口真基, 石渡恵美子, 定期的なワクチン接種を考慮した時間遅れを含む離散型SIRモデルの大域的挙動, 日本数学会応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2009年12月

③ 福田亜希子, 石渡恵美子, 岩崎雅史, 中村佳正, 離散ハングリー可積分系に基づく帯行列の固有値計算アルゴリズム, 日本数学会 2009年度秋季総合分科会応用数学分科会, 大阪大学, 2009年9月

④ 福田亜希子, 石渡恵美子, 岩崎雅史, 中村佳正, 離散ハングリー可積分系による固有値計算アルゴリズムとその漸近挙動, 日本数学会応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2008年12月

⑤ 石渡恵美子, ある種の差分方程式の安定性について, 日本応用数理学会平成20年度年会オーガナイズドセッション「生物システムの安定性」, 東京大学, 2008年9月

[図書] (計0件)

なし

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

なし

○取得状況 (計0件)

なし

[その他]

ホームページ等

<http://www.tus.ac.jp/fac/teacher/achievement.php?A05511>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 恵美子 (ISHIWATA EMIKO)

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号: 30287958

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし