

## 自己評価報告書

平成 23 年 3 月 31 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 年度～2011 年度

課題番号：20540138

研究課題名 (和文) ソボレフ不等式の最良定数—連続から離散へ

研究課題名 (英文) The Best Constant of Sobolev Inequalities  
- from continuous to discrete

研究代表者

永井 敦 (NAGAI ATSUSHI)

日本大学・生産工学部・准教授

研究者番号：90304039

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学

## 1. 研究計画の概要

(1) 20 世紀の微分方程式論の要であるソボレフ不等式の最良定数を境界値問題のグリーン関数をベースにして求める。

(2) 同時にこれまで手がけられていなかったソボレフ不等式の離散化を確立する。

## 2. 研究の進捗状況

(1) 棒の撓み問題を記述する 4 階常微分方程式の 16 種類の自己共役境界値問題についてグリーン関数を求めて、その正値性及び相互の大小関係を比較、厳密に証明した。これは論文 Japan J. Ind. Appl. Math. 18(2001) pp. 543--566 の拡張及び別証明を与え、本研究結果は現在論文を作成し、投稿中である。また棒の撓みを記述する 4 階常微分方程式でパラメータが特殊な場合はグリーン関数を求めることは不可能であるが、対称直交化法と呼ばれる手法を用いて広義グリーン関数を求め、対応するソボレフ不等式の最良定数と最良関数を求めることに成功した。さらに 2M 階常微分作用素に対する固定端境界値問題のグリーン関数を求めて、対応するソボレフ不等式の最良定数と最良関数を具体的に求めた。本研究結果は Boundary Value Problems に掲載が決まった。

(2) 高階常差分作用素に対応するグリーン行列及び一般化グリーン行列を求めて、離散ソボレフ不等式を導出、その最良定数計算を行っている。特に正 4, 6, 8, 12, 20 面体上で離散ラプラシアンを考え、対応する離散ソボレフ不等式を導出して、その最良定数と最良関数を計算した。最良定数は離散ラプラシアン行列のペンローズムーア一般化逆行列 (グリーン行列) の対角線値の最大値で与えられ、同時に離散ラプラシアンの 0 を除く固

有値の調和平均で与えられた。本研究成果は 2011 年 3 月電気通信学会で開催された応用数理学会において発表し、現在論文を作成中である。

## 3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

(理由) 2. (1)の常微分作用素については様々な興味深い自然現象に付随した常微分方程式の境界値問題を調べることができた。常微分作用素のみならず高階熱作用素や重調和作用素などの偏微分作用素に付随して現れる多変数ソボレフ不等式についても、興味深い結果を得ており、現在論文を作成中である。

2. (2)の離散化については、当初の計画では 1 次元格子上の離散ソボレフ不等式をある買う予定であったが、それに加えて正多面体上の離散ソボレフ不等式を導出し、その最良定数を計算することに成功した。

## 4. 今後の研究の推進方策

(1) 3. で述べた通り、偏微分作用素に付随して現れるソボレフ不等式についてより研究を深めていきたい。具体的には高階熱作用素、定常高階熱作用素、重調和作用素、多重調和作用素について研究を進める。

(2) 正多面体上の離散ソボレフ不等式に関する成果は今後論文にまとめる予定である。加えてサッカーボールなどの切頂正多面体についても研究を進める。

## 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- [1] K.Watanabe, Y. Kametaka, H.Yamagishi, A.Nagai, K.Takemura, The Best Constant of Sobolev Inequality Corresponding To Clamped Boundary Value Problem, Boundary Value Problems, Vol. 2011(2011) (to appear) 査読有り
- [2] K. Takemura, H. Yamagishi, Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai : The best constant of Sobolev Inequality corresponding to a bending problem of a beam on an interval, Tsukuba J. Math. 33(2009) pp. 253—280 査読有り
- [3] 山岸弘幸、亀高惟倫、武村一雄、渡辺宏太郎、永井敦：弾性基盤上の張力をかけた棒のたわみの2点境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数、日本応用数理学会論文誌 19(2009) pp. 489—518 査読有り
- [4] Y.Kametaka, A.Nagai, K.Watanabe, K.Takemura, H.Yamagishi: Giambelli's formula and the best constant of Sobolev inequality in  $n$  dimensional Euclidean space, Scientiae Mathematicae Japonicae e-2009(2009) pp. 621—635 査読有り
- [5] A.Nagai, Y. Kametaka, K.Watanabe: The best constant of discrete Sobolev inequality, J. Phys. A 42(2009) 454014(12pp)査読有り

〔学会発表〕(計2件)

- [1] 山岸弘幸：正多面体に対応する離散ソボレフ不等式の最良定数、日本応用数理学会、2011年3月7日、電気通信大学
- [2] 永井敦: 3次元球における重調和作用素と対応するソボレフ不等式の最良定数、日本数学会、2009年9月24日、大阪大学