様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　５月　18 日現在

機関番号：32665
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2011
課題番号：20540138
研究課題名（和文）　ソボレフ不等式の最良定数―連続から離散へ

研究課題名（英文）　The Best Constant of Sobolev Inequalities
- from continuous to discrete

研究代表者
永井　敦（NAGAI ATSUSHI）
日本大学・生産工学部・准教授
研究者番号：90304039

研究成果の概要（和文）：
20 世紀の微分方程式論の要であるソボレフ不等式の最良定数を各種境界値問題のグリーン関数をベースにして求めた．同時にこれまで手がけられていなかったソボレフ不等式の離散化を行った．

研究成果の概要（英文）：
We have found the best constants of Sobolev inequalities, which play important roles in the development of differential equations in 20th century, by using Green functions of many kinds of boundary value problems. We also discretize the Sobolev inequalities, which had been unsolved problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)
キーワード：応用数学

１．研究開始当初の背景

本研究の中心テーマであるソボレフ不等式(Sobolev Inequality)は 20 世紀の微分方程式論の中核となるものであるがその一方で次の問題を残した．

__問題__：

(1) ソボレフ不等式において定数 C のうち最小の定数（最良定数,best constant）C0 を求めよ．
(2) ソボレフ不等式で定数 C を C0 で置き換えたとき等号を達成する関数(best function) u=u0(x)を求めよ．

上記の 2 つの問題に対しては、ほとんど考察の対象とならずほぼ未解決であった．
本研究においてはソボレフ不等式の最良評価を行う．

本研究の研究背景にはソボレフ不等式の最良評価に関する先行研究
[T] G. Talenti：
”The Best Constant of Sobolev Inequality”
Ann. Mat. Pura. Appl. 110(1976)
pp. 353―372

がある．上記の論文[T]において Talenti は関数の対称化(Symmetrization)と呼ばれる変分学的手法によりソボレフ不等式のパラメータや次元がある条件を満たす場合、また対象とする領域がＮ次元ユークリッド空間のときについてソボレフ不等式の最良定数を求めている．

一方、ソボレフ不等式の離散化に関しては未開拓の領域であったが、近年我々のグループは論文
[N] A.Nagai, Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Takemura and K. Watanabe, "Discrete Bernoulli Polynomials and the Best Constant of the Discrete Sobolev Inequality", Funkcialaj Elvacioj 51(2008) pp. 307—327
において初めて１次元周期格子上の離散ソボレフ不等式の導出に成功し、その最良評価を行った．

２．研究の目的

本研究課題の目的は主に以下の２点である．

(1) ソボレフ不等式の最良定数
基礎科学の諸分野に登場するさまざまな微分方程式の境界値問題を設定し、そのグリーン関数を求める．境界値問題によっては狭い意味でのグリーン関数が存在したい場合もあり、この場合についても対称直交化法 (Symmetric Orthgonalization Method)を用いることで一般化グリーン関数を求める．
グリーン関数G(x,y)はヒルベルト空間Hおよびソボレフ内積（・,・）_H を適切に設定すると再生核となる．言い換えると以下が成立する．

(i) グリーン関数 G(x,y)は x を任意に固定すると y の関数としてヒルベルト空間Ｈに属する．
(ii) ヒルベルト空間の任意の元 u(x)に対して、グリーン関数 G(x,y)とのソボレフ内積（・,・）H を取ると元の関数 u(y)が再生される．言い換えると、再生等式(Reproducing Relation)
(u(x),G(x,y))_H=u(y)
が成立する．

上の再生等式からコーシーシュワルツ不等式、場合によってはヘルダーの不等式を適用することによりソボレフ不等式を導出する．
次にグリーン関数の各種ノルムを計算することによってソボレフ不等式の最良定数また等号を達成する関数（最良関数）を具体的に求める．
力学や電気回路の分野に現れる諸問題について、ソボレフ不等式を導出し、その最良定数と最良関数を与えることによって、物理学および工学現象の数学的基盤を与えることを目標とする．

(2) 離散ソボレフ不等式の最良定数
次に第２の目的として、これまで手がけられなかったソボレフ不等式の離散化とその最良定数および最良関数の計算を行う．差分方程式の境界値問題に対して、グリーン行列を求めてその再生核行列としての構造を調べる．
以上の結果は、解析学のみならず数値解析における誤差の見積もり、グラフ理論とソボレフ不等式との関連など幅広い数理工学的応用を目標とする．

３．研究の方法
前に述べた通り、ソボレフ不等式については Talenti の先行研究があるが、我々は Talenti とは別のパラメータや次元のソボレフ不等式を対象とする．
さらに考えている領域もＮ次元ユークリッド空間全体に限らず、領域が境界をもつ場合を中心にソボレフ不等式を構成、最良評価を行っている．
また Talenti が変分学的手法でソボレフ不等式の最良評価を行ったのに対して、我々は別の切り口、すなわち各種微分方程式の境界値問題のグリーン関数(Green function)および再生核理論(Theory of reproducing kernel)に基づく手法によってソボレフ不等式の研究を展開する．
グリーン関数論および再生核理論という新たな手法を用いることによって、Talenti とは異なったパラメータ領域および異なった空間における新たなクラスのソボレフ不等式に対して最良評価を与えることが可能になる．

次に扱う微分方程式の境界値問題は次の通りである．

- 糸のたわみ問題（2 階常微分方程式）
- 棒のたわみ問題（4 階常微分方程式）
- トムソンケーブル（梯子形回路）

次に差分方程式の境界値問題は次の通りである．

- 1 次元格子上の離散ラプラシアン
- 正多面体上の離散ラプラシアン
- 正多面体上の離散熱作用素

どれも古典的ではあるが基礎工学における最重要な問題を背景とする．これは物理的および工学的に重要な問題からは数学的にも重要な結論が得られるという経験則に基づくものである．

各種境界値問題のグリーン関数、一般化グリーン関数、またはグリーン行列、一般化グリーン行列について正値性、再生核構造、対角線値、各種ノルムなどの情報を詳細にかつ丁寧に調べ上げて，対応するソボレフ不等式および離散ソボレフ不等式の最良定数および最良関数を個々に求めていく．

４．研究成果

得られた研究成果を(1)常微分方程式(2)偏微分方程式(3)差分方程式の 3 項目についてまとめる．

(1) <u>常微分作用素の境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数</u>：

棒のたわみ問題、糸のたわみ問題、および電気回路をはじめとして、様々な興味深い自然現象に付随した常微分方程式の境界値問題を設定し、そのグリーン関数を求めた．

境界条件によっては対応する固有値問題にゼロ固有値が存在することが原因で、狭義のグリーン関数が存在しないこともある．その場合はゼロ固有値に対応する固有関数との直交性およびグリーン関数を対称性を課す「対称直交化法」と呼ばれる手法により広義の一般化されたグリーン関数を構成した．

また棒や糸のたわみ問題において、両端固定端境界値問題(clamped boundary value problem)に対しては 2 階、4 階に加えて２M階常微分作用素の境界値問題にまで拡張して対応するグリーン関数を求めた．

これらのグリーン関数の正値性、階層構造および再生核構造を調べて、再生等式やグリーン関数の定義式から対応するソボレフ不等式およびソボレフ型不等式を導出した．次に各種グリーン関数の対角線値を調べて、ソボレフ不等式の最良定数および最良関数を計算することに成功した．

この成果は棒（または糸）のたわみ問題においては棒（糸）のたわみの最大値を棒（糸）に溜まっているポテンシャルエネルギーで上から評価する不等式を表している．そして電気回路の問題においては、はしご形回路において出力電圧の最大値を入力のエネルギーで評価する不等式を与えるものである．物理学や工学への応用の面からもソボレフ不等式による数学的基盤を与えたという点において、興味深い結果を得ることができた．

本研究成果は 4 編の査読付論文[2],[3],[4],[5]として発表した．

(2) <u>偏微分作用素の境界値問題とソボレフ不等式の多変数化</u>：

常微分作用素のみならず高階熱作用素や重調和作用素などの偏微分作用素に付随して現れる多変数ソボレフ不等式についても，最良評価を行い，その最良定数はグリーン関数のある種のノルムを計算すればよいことがわかった．

(i) 重調和作用素と対応するソボレフ不等式：

重調和作用素の円板内部および球内部における自己共役境界値問題を設定して、それぞれフーリエ級数展開および球面調和関数展開を用いてグリーン関数を計算した．次にガウスグリーンの定理によりグリーン関数の再生核構造を証明し再生等式から対応するソボレフ不等式を導出した．さらにソボレフ不等式の最良定数と最良関数をグリーン関数のある種の極限を用いて計算した．本研究成果は 2009 年度秋に大阪大学で開催された日本数学会で発表した．

(ii) 高階熱作用素と対応するソボレフ型不等式：

次に高階熱作用素の境界値問題を設定し、フーリエ変換に基づいてグリーン関数を計算、グリーン関数の性質からソボレフ型不等式を導出した．さらに不等式の最良定数がグリーン関数の L2 ノルムに等しいことを示し、実際に計算した．L2 ノルムの計算はパーセバルの等式に基づいて複素積分による手法と、整関数に対する一致の定理を用いた手法、以上 2 つの手法で計算し、共に同じ結果を与えることを確認した．本研究成果は現在論文を投稿中である．

(3) <u>差分方程式の境界値問題と対応する離散ソボレフ不等式</u>：

「研究の背景」で述べた論文[N]で得られた結果をさまざまなクラスの差分方程式の境界値問題に拡張する．具体的には各種差分方程式の境界値問題の離散化されたグリーン関数(以後、「グリーン行列(Green matrix)」と呼ぶ）を具体的に求めて、その再生核構造を調べる．次に再生等式から離散化されたソボレフ不等式を導出する．さらに不等式の最良定数と最良関数をグリーン行列を調べることによって求める．以後 1 次元格子上と 5 種類の正多面体上の離散ソボレフ不等式について得られた成

果を報告する．

(i)　1 次元格子上の離散ソボレフ不等式：

1 次元格子上のパラメータ付き２M階差分作用素の無限格子および周期格子における境界値問題を設定してそれぞれのグリーン行列を求めた．
グリーン行列はヒルベルト空間を適切に設定すると再生核行列となる．再生等式からコース―シュワルツの不等式を経て離散ソボレフ不等式の導出に成功した．さらにグリーン行列の対角線上の値を調べることによって、離散ソボレフ不等式の最良定数（行列式によって表現した）および最良関数を求めた．
低次の場合の最良定数については行列式を具体的に計算して、同時に定数の正値性が分かる形でも記述した．本研究成果は論文[6]に発表した．

(ii)　5 種類の正多面体上の離散ソボレフ不等式：

ソボレフ不等式の離散化とその最良定数および最良関数導出については、当初の計画では 1 次元格子上の離散ソボレフ不等式を扱う予定であったが、それに加えて以上の成果を正多面体上で展開することに成功した．
正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体上の 5 種類の正多面体を扱った．各正多面体の頂点を適切に番号付けして離散ラプラシアン行列を求めた．離散ラプラシアン行列は固有値 0 をもつため狭い意味でのグリーン行列（逆行列）は存在しない．しかし固有値 0 に対応する固有ベクトルとの直交性を仮定することによって広い意味でのグリーン行列（ペンローズムーア一般化逆行列）を具体的に求めることができる．
次にHを 0 固有値に対応する固有ベクトルの直交補空間として、内積を離散ラプラシアンを用いて適切に定めると、Hはヒルベルト空間となり．さらに求めた一般化グリーン行列がヒルベルト空間Hの再生核となる．
次に再生等式から連続の場合と同様の手順で離散ソボレフ不等式を導出した．さらに一般化グリーン行列の対角成分は離散ソボレフ不等式の最良定数になっており、一般化グリーン行列の各列ベクトルの定数倍が最良関数（最良ベクトル），つまり不等式の等号成立条件を与えることを示した．
導出した離散ソボレフ不等式は各種正多面体頂点の釣り合いの位置からのたわみの最大値を多面体の一種のエネルギーノルムで評価した不等式である．また、その最良定数は各種正多面体の「堅さ」を表している．本研究成果は論文[1]に発表した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

[1] 亀高惟倫，渡辺宏太郎，山岸弘幸，永井敦，武村一雄：正多面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数，日本応用数理学会論文誌 21(2011) pp.289—308. 査読有り

[2] K.Watanabe, Y. Kametaka, H.Yamagishi, A.Nagai, K.Takemura, The Best Constant of Sobolev Inequality Corresponding To Clamped Boundary Value Problem, Boundary Value Problems, Vol. 2011(2011) ID 875057, 17 pages.　査読有り

[3] K. Takemura, H. Yamagishi, Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai ：The best constant of Sobolev Inequality corresponding to a bending problem of a beam on an interval, Tsukuba J. Math. 33(2009) pp. 253—280　査読有り

[4] 山岸弘幸、亀高惟倫、武村一雄、渡辺宏太郎、永井敦 ：弾性基盤上の張力をかけた棒のたわみの 2 点境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数，日本応用数理学会論文誌 19(2009) pp. 489—518　査読有り

[5] Y.Kametaka, A.Nagai, K.Watanabe, K.Takemura, H.Yamagishi: Giambelli's formula and the best constant of Sobolev inequality in ine dimensional Euclidean space, Scienticae Mathematicae Japonicae e-2009(2009) pp. 621—635　査読有り

[6] A.Nagai, Y. Kametaka, K.Watanabe: The best constant of discrete Sobolev inequality, J. Phys. A 42(2009) 454014(12pp)査読有り

〔学会発表〕（計 2 件）

［1］山岸弘幸：正多面体に対応する離散ソボレフ不等式の最良定数、日本応用数理学会、2011 年 3 月 7 日、電気通信大学

[2] 永井敦: 3 次元球における重調和作用素と対応するソボレフ不等式の最良定数，日本数学会, 2009 年 9 月 24 日，大阪大学

６．研究組織
(1)研究代表者

永井　敦（NAGAI ATSUSHI）
日本大学・生産工学部・准教授

研究者番号：90304039

(2)研究分担者
亀高　惟倫（KAMETAKA YOSHINORI）
大阪大学・大学院基礎工学研究科・名誉教授
研究者番号：00047218