

機関番号：32702

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540142

研究課題名（和文） 無限組み合わせ論における諸原理とコンパクト基数

研究課題名（英文） Infinite combinatorial principles and compact cardinals

研究代表者 阿部吉弘（ABE YOSHIHIRO）

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：10159452

研究成果の概要（和文）： $P_\kappa\lambda = \{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$ （濃度が κ 未満の λ の部分集合の全体）上の組み合わせ論におけるいくつかの事実を明らかにした。主な例を挙げると：

- (1) λ の cofinality が κ 未満のとき、 $P_\kappa\lambda$ の stationary set S で、その stationary な部分集合は必ず λ^+ 個の stationary set に分割できるものが存在する。
- (2) λ の cofinality が κ 以上で $P_\kappa\lambda$ 上に weakly normal ideal が存在すれば、 $P_\kappa\lambda$ の濃度は $\text{Max}(2^{<\kappa}, \lambda)$ である。
- (3) λ の cofinality が κ 以上のとき、 $P_\kappa\lambda$ の部分集合が分割の性質をもつことと、ineffable であることは同値である。

研究成果の概要（英文）：We proved several facts in the combinatorial set theory on $P_\kappa\lambda = \{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$, the set of all subsets of λ with cardinality less than κ . For instance:

- (1) If the cofinality of λ is smaller than κ , then there exists a stationary subset S of $P_\kappa\lambda$ such that every stationary subset of S can be splitted into λ^+ many disjoint stationary sets.
- (2) If the cofinality of λ is not smaller than κ and there is a weakly normal ideal on $P_\kappa\lambda$, then the cardinality of $P_\kappa\lambda$ is $\text{Max}(2^{<\kappa}, \lambda)$.
- (3) Suppose that the cofinality of λ is not smaller than κ and X is a subset of $P_\kappa\lambda$. Then, X is ineffable if and only if it has the partition property.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
20年度	700,000円	210,000円	910,000円
21年度	700,000円	210,000円	910,000円
22年度	700,000円	210,000円	910,000円
総計	2,100,000円	630,000円	2,730,000円

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード： $P_\kappa\lambda$, ineffability, 分割の性質, stationary set, コンパクト基数, cofinality, イデアル, reflection

1. 研究開始当初の背景

(1) ある巨大基数の存在下で成り立つことが、その巨大基数のもつ組み合わせ論的性質、または、それより弱い巨大基数の存在から導けるかを調べることは、巨大基数理論の主流を占めてきた。 κ が λ 超コンパクトのとき、

$P_\kappa\lambda$ で stationary reflection が成り立ち、 $P_\kappa\lambda$ は分割の性質を持つ。 κ が λ コンパクトのとき、これらに相当する組み合わせ原理が成立するかどうかを明らかにするのは、超コンパクト基数とコンパクト基数の謎めいた関係もあり、多くの研究者の興味を惹きなが

ら長年未解決な難問である。

(2) $P_\kappa\lambda$ の濃度は、集合世界の構造に深い影響を与える特異基数仮説と密接に関係しているため、重要な問題である。 κ が λ コンパクトであると $P_\kappa\lambda$ の濃度は決まる。コンパクト基数の仮定を弱めて同じ結果を得ることに、これまでの研究でかなりの結果を残してきたが、 κ が mildly λ ineffable で $cf(\lambda) < \kappa$ の場合が残されていた。

(3) 正則基数 κ 上では、一見異なる組み合わせ論的原理が、完全に一致する場合が多く知られている。代表的な例である ineffability と分割の性質が、 $P_\kappa\lambda$ でも一致するかどうかは、30 年来研究されてきた問題である。平成 18~19 年度の助成研究で、 $cf(\lambda) < \kappa$ の場合には否定的、 $cf(\lambda) \geq \kappa$ の場合には λ が (かなり強い) 巨大基数でないという条件付で肯定的な答えが得られた。これを受けて、本研究では完全解決を目指した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、次の 3 点であった。

(1) コンパクト基数と組み合わせ論 ----- κ が λ コンパクトのとき、次のことが言えるか？

① $P_\kappa\lambda$ で stationary set の reflection (以下、SRF と略記する) が成り立つか？

② $P_\kappa\lambda$ は弱い分割の性質をもつか？

(2) 特異基数仮説 ----- Mild ineffability から $P_\kappa\lambda$ の濃度が決定できるか？

(3) 組み合わせ論的性質から定義されるイデアル間の関係：

① Completely ineffable ではない集合のなすイデアルは、分割の性質をもつか？

② Ineffable ではない集合のなすイデアルと、分割の性質をもたない集合のなすイデアルとは一致するか？

3. 研究の方法

数学の研究であるから、特別なことは何もない。各人が必死に考えるのが基本で、可能な限り直接会ってディスカッションする機会をもった。定例の春秋の数学会の他に、京都大学数理解析研究所の共同研究集会、2008 年 9 月に神戸大学で開催された Asian Logic Conference を初めとする国際研究集会等に参加・発表した。また、毎年夏にヨーロッパで開催される Logic Colloquium にも参加者を送る等、海外の研究者からの情報収集にも努めた。

特別なことをひとつあげると、平成 16 年度の助成研究から継続している、年 2 回 (通常 9 月と 2 月)、1 週間の神奈川大学におけるセミナーである。連携研究者も含めて全員が参加し、優秀な若手研究者や大学院生を招いて話をしてもらった。分担者の薄葉は初回からの参加者である。神戸大学の酒井拓史も度々参加

してきたが、現在では国内外で優秀な若手と認識されている。フレッシュな頭脳に接し、我々の利するところも大であったが、集合論の次代を担う人達に何らかの刺激になったことを期待する。

4. 研究成果

本研究の主要な舞台である $P_\kappa\lambda$ は次のように定義される。

定義. $P_\kappa\lambda = \{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$, つまり、濃度が κ 未満の λ の部分集合よりなる集合である。

$P_\kappa\lambda$ が注目されるようになったのは、巨大基数のうちで最も重要な超コンパクト基数及びコンパクト基数との関連である。

定義. $P_\kappa\lambda$ 上の極大フィルター U が正規 $\Leftrightarrow \{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \in x\} \in U$ であるような関数 f は U のある元 X 上でコンスタントになる。
 κ が λ 超コンパクト $\Leftrightarrow P_\kappa\lambda$ 上に正規極大フィルターが存在する。

κ が超コンパクト $\Leftrightarrow \kappa$ 以上の任意の基数 λ に対して、 κ は λ 超コンパクト。

$P_\kappa\lambda$ 上の極大フィルター U が fine $\Leftrightarrow \forall \alpha < \lambda \{x : \alpha \in x\} \in U$ かつ $\forall W \in P_\kappa U \cap W \in U$ 。
 κ が λ コンパクト $\Leftrightarrow P_\kappa\lambda$ 上に fine 極大フィルターが存在する。

κ がコンパクト $\Leftrightarrow \kappa$ 以上の任意の基数 λ に対して、 κ は λ コンパクト。

また、 $P_\kappa\lambda$ の研究では λ の cofinality ($cf(\lambda)$ で表す) が重要になる。

定義. $cf(\lambda) = \delta \Leftrightarrow \delta$ は λ に収束する長さ δ の順序数の上昇列が存在するような最小の順序数である。

$cf(\lambda) = \lambda$ のとき λ は正則 (regular) であると言い、 $cf(\lambda) < \lambda$ のとき特異 (singular) と言う。 λ より大きい最小の基数 (λ^+ で表す) は正則である。

(1) コンパクト基数と組み合わせ論

① $P_\kappa\lambda$ で SRF が成り立つか？

Stationary reflection には数種類あるので定義を記す。

定義. $X \subset P_\kappa\lambda$ が stationary in $P_\kappa\lambda \Leftrightarrow \forall f : \lambda^2 \rightarrow P_\kappa\lambda \exists x \in X \forall (\alpha, \beta) \in x^2 f(\alpha, \beta) \subset x$
 $x \in P_\kappa\lambda$ に対し、 $P_{|x \cap \kappa|} x = \{y \subset x : |y| < |x \cap \kappa|\}$ 。
 $P_\kappa\lambda$ の stationary な部分集合 X が $x \in P_\kappa\lambda$ に reflect する $\Leftrightarrow X \cap P_{|x \cap \kappa|} x$ は $P_{|x \cap \kappa|} x$ において stationary である。

$P_\kappa\lambda$ で stationary reflection (SRF) が成り立つ \Leftrightarrow 任意の $P_\kappa\lambda$ の stationary な部分集合 X に対して、 X が reflect するような $x \in P_\kappa\lambda$ が存在する。

κ が κ^+ コンパクトで、 $P_\kappa\kappa^+$ でSRFが成り立たない強制モデルを構成しようとしたが、成功しなかった。「Krugerの結果を利用して、 $\{x \in P_\alpha\alpha^+ : x \cap \alpha < |x|\}$ が non-stationary な α を κ の下にたくさん作り、それらのなす集合に club-shooting を行う」という方針は悪くないと思うが、 κ のコンパクト性を保存するところに困難がある。

Stationary set に関して reflection と並んで興味もたれてきたのは、どれだけ多くの stationary set に分割できるかである。これは、超コンパクト性を定義する $P_\kappa\lambda$ 上の正規極大フィルターの弱い形である、正規飽和とイデアルの問題につながる。次の結果が得られた：

定理 1. $cf(\lambda) < \kappa$ とする。

(i) $P_\kappa\lambda$ の stationary set で、その stationary な部分集合は必ず λ^+ 個の stationary set に分割できるものが存在する。

(ii) $\{x \in P_\kappa\lambda : cf(|x|) \neq cf(\lambda)\}$ が stationary ならば、(i) の性質をもつ stationary set の例となる。

これは、Foreman-Magidor(2001) と塩谷(1999)による「 $cf(\lambda) < \kappa$ ならば $P_\kappa\lambda$ は λ^+ 個の stationary set に分割できる」と言う結果を大幅に拡張している。

Woodinによる、少し弱い形での stationary の概念も知られている。

定義. 集合 X の冪集合 $\{x : x \subset X\}$ を $P(X)$ で表す。

集合 $A \neq \emptyset$ に対して、

$X \subset P(A)$ が stationary in $P(A)$
 $\Leftrightarrow \forall f : [A]^{<\omega} \rightarrow A \exists x \in X (x \neq A \text{ かつ } f''[x]^{<\omega} \subset x)$

これに関して、次のことを示した：

定理 2. κ は正則な非可算基数で $\kappa \leq \lambda$ とする。 $S \subset P(\lambda)$ が stationary in $P(\lambda)$ で $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary ならば、 S は κ 個の stationary set に分割できる。

D. Burke によって、2 個に分割できることは示されていたが、大きく改善されている。また、Solovay(1967)とGitik(1985)の、夫々 κ 及び $P_\kappa\lambda$ の stationary set が κ 個の stationary set に分割できるという結果を $P(\lambda)$ に拡張したものになっている。

② $P_\kappa\lambda$ は弱い分割の性質をもつか？

弱い分割の性質とは次のように定義される：

定義. $X \subset P_\kappa\lambda$ が unbounded ($X \in I_{\kappa,\lambda}^+$ で表す)
 $\Leftrightarrow \forall x \in P_\kappa\lambda \exists y \in X \ x \subset y$
 $X \subset P_\kappa\lambda$ が弱い分割の性質をもつ

$$\Leftrightarrow \forall f : [P_\kappa\lambda]^2 \rightarrow 2 \exists H \subset X \\ (H \in I_{\kappa,\lambda}^+ \text{ で } |f''[H]^2| = 1)$$

まったく歯が立たなかったが、試行錯誤するなかで、異なるタイプの分割の性質 (square bracket partition relation) に関して、いくつか結果を得た。

定義. $B(\kappa, \lambda, \alpha) \equiv P_\kappa\lambda \rightarrow [I_{\kappa,\lambda}^+]_\alpha^2$
 $\Leftrightarrow \forall f : [P_\kappa\lambda]^2 \rightarrow \alpha \exists H \subset X \\ (H \in I_{\kappa,\lambda}^+ \text{ で } f''[H]^2 \neq \alpha)$

次の事実が知られていた：

定理. (a) $\kappa = \nu^+$ で ν が正則ならば、 $B(\kappa, \lambda, \lambda)$ は成り立たない (Todorćević, 1991).

(b) $\kappa = \nu^+$ で $\lambda \geq 2^{2^\kappa}$ ならば、 $B(\kappa, \lambda, \lambda)$ は成り立たない (Matet, 2006).

(c) $\kappa = \nu^+$ で ν は正則、 $\nu^{cf(\lambda)} = \nu$ ならば、 $B(\kappa, \lambda, \lambda^+)$ は成り立たない (Shioya, 2005).

本研究で明らかになったのは：

定理 3. (i) $\kappa = \nu^+$ で $B(\kappa, \kappa, \kappa)$ が成り立たないならば、 $B(\kappa, \lambda, \lambda)$ は成り立たない。

(ii) $\kappa = \nu^+$ で ν は特異、 $\nu^{cf(\nu)} \leq \lambda$ ならば、 $B(\kappa, \lambda, \lambda)$ は成り立たない。

(iii) $\kappa = \nu^+$ で ν は正則、 $cf(\lambda)^+ < \kappa$ ならば、 $B(\kappa, \lambda, \lambda^+)$ は成り立たない。

(i) は (a) を改善しているし、(ii) と (iii) は (b), (c) と異なる仮定から同じ結論を導いている。

(2) 特異基数仮説

$cf(\lambda) < \kappa$ で κ が mildly λ ineffable ならば、 $P_\kappa\lambda$ の濃度 λ^κ は λ^+ であることを証明するのが目的だったが、果たせなかった。Mild ineffability の定義は次の通りである：

定義. κ が mildly λ ineffable \Leftrightarrow
 $\forall f (\forall x \in P_\kappa\lambda \ f(x) \subset x \Rightarrow \exists A \subset \lambda \\ \forall y \in P_\kappa\lambda \{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \cap y = A \cap y\} \in I_{\kappa,\lambda}^+)$.

解決に向けて、 $P_\kappa\lambda$ の non-stationary set の性質をもっと究明しないといけないだろう。

コンパクト基数を定義する $P_\kappa\lambda$ 上の fine 極大フィルターを弱めたものとしては、mild ineffability の他に $P_\kappa\lambda$ 上の weakly normal ideal がある。

定義. $I_{\kappa,\lambda} \equiv \{X \subset P_\kappa\lambda : X \text{ は unbounded ではない}\}$ とする。

I が $P_\kappa\lambda$ 上のイデアル (ideal) $\Leftrightarrow I$ は次の (i) ~ (iv) を満たす；

(i) $\forall X \in I \ X \subset P_\kappa\lambda$

(ii) $I_{\kappa,\lambda} \subset I$

- (iii) $X \subset Y \in I$ ならば $X \in I$
- (iv) $\{X_\alpha : \alpha < \delta\} \in I$ かつ $\delta < \kappa$ ならば,
 $\bigcup X_\alpha : \alpha < \delta \in I$

上記の (iv) の性質を κ -完備 (κ -complete) と言う。

I に属さない $P_\kappa \lambda$ の部分集合の族を I^+ で表す。

$$I \text{ が weakly normal} \Leftrightarrow \forall f (\forall x \in P_\kappa \lambda \ f(x) \in x \\ \Rightarrow \exists \gamma < \lambda \{x : f(x) > \gamma\} \in I)$$

$$I \text{ が 正規} \Leftrightarrow \forall f \ \forall X \in I^+ (\forall x \in X \ f(x) \in x \\ \Rightarrow \exists \gamma < \lambda \{x : f(x) = \gamma\} \in I^+).$$

代表者(1993)は、 $P_\kappa \lambda$ 上の weakly normal ideal の存在を仮定して、 $cf(\lambda) < \kappa$ 及び、 λ が正則の場合に $P_\kappa \lambda$ の濃度を (κ が λ コンパクトのときと同じに) 決定した。D. Burke (2000) は $cf(\lambda) \geq \kappa$ の場合に λ より大きな可測基数の存在を仮定に付け加えて、 $\lambda^{\kappa} = \text{Max}(2^{<\kappa}, \lambda)$ であることを示している。今回、次の結果を得た：

定理 4. $P_\kappa \lambda$ 上に weakly normal ideal が存在し、 $cf(\lambda) \geq \kappa$ ならば、 $P_\kappa \lambda$ の濃度 $\lambda^{\kappa} = \text{Max}(2^{<\kappa}, \lambda)$ である。

(3) 組み合わせ論的性質から定義されるイデアル間の関係：

- ① Completely ineffable ではない集合のなすイデアルは、分割の性質をもつか？
- ② Ineffable ではない集合のなすイデアルと、分割の性質をもたない集合のなすイデアルとは一致するか？

この課題は、ほぼ完全な形で解決され、助成に応えることができた。まず定義を述べる。

定義. $NS_{\kappa, \lambda} = \{X \subset P_\kappa \lambda : X \text{ は non-stationary}\}$ とする。 $NS_{\kappa, \lambda}$ は最小の正規イデアルになる。 $X \subset P_\kappa \lambda$ が ineffable \Leftrightarrow

$$\forall f (\forall x \in P_\kappa \lambda \ f(x) \subset x \Rightarrow \exists A \subset \lambda \\ \{x \in P_\kappa \lambda : f(x) = A \cap x\} \in NS_{\kappa, \lambda}^+).$$

$P_\kappa \lambda$ が ineffable のとき、 κ は λ ineffable であると言う。

$X \subset P_\kappa \lambda$ が分割の性質をもつ

$$\Leftrightarrow \forall f : [P_\kappa \lambda]^2 \rightarrow 2 \ \exists H \subset X \\ (H \in NS_{\kappa, \lambda}^+ \text{ で } |f''[H]^2| = 1).$$

$P_\kappa \lambda$ 上のイデアルで、次の条件(*)

$$\forall f \ \forall X \in I^+ (\forall x \in X \ f(x) \subset x \Rightarrow \exists A \subset \lambda \\ \{x \in X : f(x) = A \cap x\} \in I^+)$$

を満たす最小の正規イデアルを completely ineffable ideal と言い、 $X \in I^+$ は completely ineffable であると言う。このとき、 κ は completely λ ineffable であると言う。また、条件(*)を満たすイデアルは $(\lambda, 2)$ -distributive である。

イデアル I が分割の性質をもつ

$$\Leftrightarrow \forall X \in I^+ \forall f : [X]^2 \rightarrow 2 \ \exists H \subset X$$

$$(H \in I^+ \text{ で } |f''[H]^2| = 1).$$

課題 ①, ②ともに、次のような結果が得られた。 $cf(\lambda) \geq \kappa$ の場合は肯定的、 $cf(\lambda) < \kappa$ のときは否定的である。

定理 5. $cf(\lambda) \geq \kappa$ のとき、次のことが成り立つ。

(i) Completely ineffable ではない $P_\kappa \lambda$ の部分集合のなすイデアルは、分割の性質をもつ。

(ii) $X \subset P_\kappa \lambda$ に対して

X は ineffable $\Leftrightarrow X$ は分割の性質をもつ。

定理 6. $cf(\lambda) < \kappa$ かつ $2^\lambda = \lambda^+$ ならば、completely ineffable な $P_\kappa \lambda$ の部分集合 X で、分割の性質を持たないものが存在する。

κ が λ ineffable だと、特異基数仮説が成り立つので、定理 6 の条件を満たすような λ は必ず存在する。

上記 2 定理により、Magidor (1974) の「 $X \subset P_\kappa \lambda$ が分割の性質をもてば、 X は ineffable である」、 「正規イデアル I が分割の性質をもつとき、任意の $X \in I^+$ は completely ineffable である」という定理の逆問題は完全に解決された。

平成 18 年度～平成 19 年度の助成研究で、「 λ が Π_1^2 -indescribable ではない」という条件(**)つきで証明されていたが、通常の stationarity ではなく、Woodin による stationarity を用いて、(**)がなくても成り立つことを示した。

定義. $X \subset P(A)$ が ineffable in $P(A)$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in X \ f_x : x \rightarrow x \Rightarrow$$

$$\exists f : A \rightarrow A \ \{x \in X : f_x = f \upharpoonright x\} \text{ は stationary})$$

X が large $\Leftrightarrow X \in F$ を満たす $P(A)$ 上の正規極大フィルターが存在する。

証明においては、次の補題が重要である：

補題 1. κ が λ ineffable で $X \subset P_\kappa \lambda$ かつ $\{x \in X : X \cap P(x) \text{ は } P(x) \text{ で large ではない}\}$ は ineffable だとする。このとき、 $P_\kappa \lambda - C$ が ineffable ではないような $C \subset P_\kappa \lambda$ と $\langle f_x : x \rightarrow x \mid x \in C \rangle$ で任意の $x \neq y \in C \cap \{x \in X : X \cap P(x) \text{ は large ではない}\}$ が、 $x \subset y$ かつ $f_x = f_y \upharpoonright x$ を満たすならば $|x| < y \cap \kappa$ であるものが存在する。

補題 2. $X \subset P_\kappa \lambda$ が ineffable ならば、 $\{x \in X : X \cap P(x) \text{ は ineffable ではない}\}$ は ineffable である。

さらに、定理 5 を補完する事実も示した：

定理 7. κ が completely λ ineffable で, λ が completely λ ineffable ならば, $(\lambda, 2)$ -distributive な正規イデアルで, 分割の性質をもたないものが存在する.

これは, 「 λ が可測基数ならば, 分割の性質を持たない $P_\kappa \lambda$ 上の正規極大フィルターが存在する」という Solovay の定理の拡張である. 条件を満たすイデアル I は, $\alpha < \lambda$ に対する $P_\kappa \alpha$ 上の completely ineffable イデアル $NCl_{\kappa, \alpha}$ を λ 上の completely ineffable イデアル NCl_{λ} で, 次のように張り合わせて得られる:

$$X \in I \Leftrightarrow \{\alpha < \lambda : X \cap P_\kappa \alpha \notin NCl_{\kappa, \alpha}\} \in NCl_{\lambda}$$

超コンパクト基数のもつ組み合わせ論的性質の関係が明らかになったので, 今後挑戦すべき問題は, コンパクト基数に関する弱い分割の性質と mild ineffability の関係を明らかにすることである.

(4) 申請課題以外の結果

組み合わせ原理と関係の深い集合論的位相空間論, 特に順序数, または順序数の積に自然な位相を導入した空間に関しての結果を得た.

定義. D を位相空間 X の部分集合とする.

D は discrete \Leftrightarrow 任意の $x \in X$ が $|D \cap Y| \leq 1$ であるような近傍 Y をもつ.

$U = \langle U(x) \mid x \in D \rangle$ が D を separate する $\Leftrightarrow U$ は pairwise disjoint で $\forall x \in D \quad x \in U(x)$.

D は separated $\Leftrightarrow D$ を separate する X の open set の族が存在する.

X は collectionwise Hausdorff $\Leftrightarrow X$ の任意の closed discrete subset が separated である.

定理 8. (i) 任意の順序数の部分空間 A_0 と A_1 の積は collectionwise Hausdorff である.

(ii) $\omega_1 + 1$ の部分空間 A_0, A_1, A_2 で, 積空間 $A_0 \times A_1 \times A_2$ が collectionwise Hausdorff ではないものが存在する. ここで, ω_1 は最小の非可算順序数である.

順序数の空間の積に関して, 2 個の積の場合と 3 個の場合とが本質的に異なることを示している. 集合論において \aleph_1 と \aleph_2 で大きな差があるという事実が連想され, 興味深い (\aleph_1 と \aleph_2 は各々, 2 番目と 3 番目の無限基数である).

集合 X 上に線形順序 $<$ が定義されているとき, $\{\{x : x < a\} : a \in X\} \cup \{\{x : x > a\} : a \in X\}$ を近傍系とする順序位相が自然に導入される. この位相空間を ordered space と言う.

定義. 位相空間 $\langle X, \tau \rangle$ が orderable $\Leftrightarrow X$ 上

の線形順序 $<$ で, それから定まる順序位相が τ になるものが存在する.

$<$ が整列順序のときは, $\langle X, \tau \rangle$ は well-orderable と言う.

$\langle X, \tau \rangle$ が sub-orderable $\Leftrightarrow X \subset Y$ で Y 上の線形順序 $<$ から定まる順序位相の X への制限が τ になるものが存在する.

実数直線の部分空間 $(0,1) \cup \{2\}$ は orderable ではないことから, 次の問題が考えられていた:

問題. $X \subset \omega_1$ と $\omega_1 - X$ がともに stationary ならば, X は orderable ではないと証明できるか?

これに否定的な解答を与えた.

定理 9. (i) 順序数からなる空間は orderable である.

(ii) 順序数 α の部分空間 X に対し, X の limit point ($\lim(X)$) で X のメンバーでないものの集合を G とする ($G = \lim(X) - X$). このとき,

X は well-orderable $\Leftrightarrow \lim(G) \cap X = \emptyset$ または $|G| \leq 1$

系 1. (i) $X \subset \omega_1$ が well-orderable \Leftrightarrow 「 $\lim(G) \cap X = \emptyset$ かつ $\sup(X) < \omega_1$ 」または X は closed.

(ii) $\omega \cdot \omega$ の部分空間は well-orderable である. ここで, ω は最小の無限順序数である.

また, Vietoris 位相を入れた空間の orthocompactness と normality の関係を明らかにしている. 位相空間 X に対し

$$A \in 2^X \Leftrightarrow \emptyset \neq A \subset X \text{ は closed}$$

$$A \in K(X) \Leftrightarrow \emptyset \neq A \subset X \text{ は compact}$$

とし, 次の base による Vietoris 位相を入れる:

V を有限個の X の開集合の族とする.

このとき

$$\langle V \rangle_{2^X} = \{F \in 2^X : F \subset \cup V, \forall Y \in V (Y \cap F \neq \emptyset)\}$$

$$\langle V \rangle_{K(X)} = \{F \in K(X) : F \subset \cup V, \forall Y \in V (Y \cap F \neq \emptyset)\}$$

定義. X の開集合の族 W が interior preserving $\Leftrightarrow \forall W' \subset W (\cap W'$ は開集合).

X は orthocompact \Leftrightarrow 任意の open cover が interior preserving な open refinement を持つ.

X は normal \Leftrightarrow 任意の disjoint な閉集合は, disjoint な開集合で分離される.

X は countably metacompact \Leftrightarrow 任意の可算 open cover が, point finite な open refinement を持つ.

定理 10 . (i) K_γ が orthocompact $\Leftrightarrow cf(\gamma) \leq \omega$ または $\omega_1 \leq cf(\gamma) = \gamma$.
(ii) K_γ は orthocompact $\Leftrightarrow K_\gamma$ は normal.
(iii) 2^ω は orthocompact $\Leftrightarrow 2^\omega$ は countably metacompact.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Yasushi Hirata, Nobuyuki Kemoto, Orthocompactness versus normality in hyperspaces, Topology and its Applications, 査読有, 掲載決定済.
- ② Toshimichi Usuba, Splitting stationary subsets in $P_\kappa\lambda$, Journal of Symbolic Logic, 査読有, 掲載決定済.
- ③ Yasushi Hirata, Nobuyuki Kemoto, Orderability of subspaces of well-orderable spaces, Topology and its Applications, 査読有, 157 巻, 2010, pp.127-135
- ④ Yasushi Hirata, The collectionwise Hausdorff property of products of two or three subspaces of ordinals, Houston Journal of Mathematics, 査読有, 35 巻, 2009, pp.891-901.
- ⑤ Toshimichi Usuba, Splitting stationary sets in $P_\kappa\lambda$ for λ with small cofinality, Fundamenta Mathematicae, 査読有, 205 巻, 2009, pp.265-287.
- ⑥ Toshimichi Usuba, Ineffability of $P_\kappa\lambda$ for λ with small cofinality, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有, 60 巻, 2008, pp.935-954.

[学会発表] (計 11 件)

- ① Toshimichi Usuba, Stationary reflection principles on $[\lambda]^\omega$, Interplay between large cardinals and small cardinals, 2010 年 10 月 27 日, 京都大学数理解析研究所.
- ② 平田康史, 順序数の積の位相的性質, 第 57 回トポロジーシンポジウム, 2010 年 8 月 14 日, さん太ホール, 岡山.
- ③ Toshimichi Usuba, Unbranched property on singular cardinals, Logic Colloquium 2010, 2010 年 6 月 30 日, Paris Diderot University, France.
- ④ 阿部吉弘, The coincidence of ineffability with partition property, 日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 26 日, 大阪大学.
- ⑤ 薄葉季路, 定常集合・巨大基数・飽和イデアル, 日本数学会秋季総合分科会 (数学基礎論・歴史分科会特別講演), 2008

年 9 月 27 日, 東京工業大学.

- ⑥ Yoshihiro Abe, Kunen's theorem on normal measures without the partition property, The 10th Asian Logic Conference, 2008 年 9 月 5 日, 神戸大学.
- ⑦ Toshimichi Usuba, A variant of normality of ideals over $P(\lambda)$, The 10th Asian Logic Conference, 2008 年 9 月 5 日, 神戸大学.
- ⑧ Toshimichi Usuba, Strong normality of ideals and a combinatorial principle of $P(\lambda)$, Workshop on Combinatorial and Descriptive Set Theory, 2008 年 8 月 25 日, 京都大学数理解析研究所.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部 吉弘 (ABE YOSHIHIRO)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号: 10159452

(2) 研究分担者

平田 康史 (HIRATA YASUSHI)
神奈川大学・工学部・非常勤講師
研究者番号: 70375400
薄葉 季路 (USUBA TOSHIMICHI)
名古屋大学・高等研究院・特任助教
研究者番号: 10513632

(3) 連携研究者

加茂 静夫 (KAMO SHIZUO)
大阪府立大学・理学部・教授
研究者番号: 30128764
塩谷 真弘 (SHIOYA MASAHIRO)
筑波大学・数理物質科学研究科・准教授
研究者番号: 30251028