

機関番号：15401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540145

研究課題名（和文） 白色雑音系のカオスの研究

研究課題名（英文） Research on chaotic behavior of white noise

研究代表者

久保 泉 (KUBO IZUMI)

広島大学・大学院理学研究科・名誉教授

研究者番号：70022621

研究成果の概要（和文）：

白色雑音系の MRM（積型再正規化法）に触発され、確率分布の直交多項式の母関数を MRM により系統的に得ることを行った。実際には、MRM 適用可能な直交多項式には制限があり、可能なクラスを決定することも問題である。良く知られた古典的な直交多項式のみならず、近年話題になっている直交多項式の母関数が自然に現れる。さらには、新しいクラスの直交多項式と母関数が得られ、そのクラスの構造が明らかになった。

研究成果の概要（英文）：

Inspired by the multiplicative renormalization method (MRM) in white noise analysis, we have researched generating functions of orthogonal polynomials of probability measures by using MRM, systematically. It is a difficult problem to determine MRM-applicable measures. Generating functions of some classical orthogonal polynomials and of recently researching ones are obtained very naturally. Moreover, we found new classes of orthogonal polynomials and generating functions. Further, we researched structures of those classes.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：確率解析・エルゴード理論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：確率論、確率解析、白色雑音、数理物理、カオス、直交多項式、母関数

1. 研究開始当初の背景

白色雑音系の研究は、Brown 運動の微分から得られる Gauss 型白色雑音系にたいする多重 Wiener 積分、Poisson 過程の微分から得られる Poisson 型白色雑音系の Homogeneous Chaos などのいずれも N. Wiener の仕事に始まった。これらに対しては、伊藤清による極めて優美な定式化が行われ、Ito 積分との関係も明らかにされて、カオスの現象

を記述・解明するために、自然科学・工学・医学・社会科学など広い分野で応用されている。研究代表者は、飛田による白色雑音解析の定式化を行い研究の基礎を築いた。連携研究者の浅井等と共に、ガウス型白色雑音系における飛田の積型再正規化を古典的な直交多項式の問題に適用することを発見し、幾つかの成果を挙げていた。具体的には、 \mathbf{R} 上の測度 μ にもなう直交多項式の母関数 $\phi(t, x)$

が $\phi(t, x) = h(\rho(t)x) / \theta(\rho(t))$, ただし $\theta(t) = \int h(tx) d\mu(x)$ の形で与えられるとき、 μ を MRM (積型再正規化法) 適用可能と言い、 $h(x)$ を MRM 因子と呼ぶこととする。 $B(t) = 1/\theta(\rho(t))$ とおくと、 $\phi(t, x) = B(t) h(\rho(t)x)$ と書けるが、これは Boas-Buck 母関数と呼ばれている。この三つ組 $(h(x), \rho(t), B(t))$ を MRM-triple と呼ぶことにする。研究代表者等は、古典的な確率測度に対して MRM 適用可能性を確認し、直交多項式を定める 3 項再帰関係の Jacobi-Szegoe parameter を MRM-triple から直接的に計算できる方法を確認していた。

また、谷口・池田・中田等とはカオスを利用した乱数発生について検討して、その応用やランダムアルゴリズムの研究を意図していた。

2. 研究の目的

MRM 因子としては、 $h(x) = \exp[x]$ や $h(x) = 1/(1-x)$ があるが、Kuo や Namli と共にこれらを MRM 因子とする測度が研究代表者によって完全に決定されていた。MRM に関する研究の最終目的は、あり得る MRM 因子を全て決定し、それを MRM 因子とする測度を決定し、さらにそれ等の測度に対する MRM 因子および MRM-triple を決定することである。これ自体は困難な問題なので、本課題の研究期間内の目的として挙げたのは、

- (1) $h(x) = (1-x)^{-\kappa}$ ($\kappa > -1/2$) が MRM 因子となることが分かっているが、これを MRM 因子にもつ測度 (直交多項式) を全て決定する。
- であった。しかし、これに関しては有効な手段を発見でき、早期に解決したので、途中から次のような目標を追加した。
- (2) 確率測度のクラスを定めて、それらが MRM 適用可能な MRM 因子を全て決定する。
- (3) 適当な MRM 因子を定めて、それに対して MRM 適用可能な確率測度を全て決定する。
- (4) 特殊な性質をもつ triple に対して、MRM 適用可能なものを全て決定する。

3. 研究の方法

しかし、上の目的にそのまま取り組むことは無謀なことなので、幾つかの段階を追って解決することを目指す。例えば、 $h(x) = \exp[x]$ を MRM 因子として MRM 適用可能な測度は Meixner クラスであるが、Meixner クラスの測度に対する MRM 因子はこの $h(x)$ に限らない。そこで、それ以外の MRM 因子を全て決定する。次に、新たに得られた MRM 因子を用いて MRM 適用可能な測度を全て決定する。そうすると、そこで現れた測度に対する MRM 因子を決定することが問題となる。

このような螺旋的探索が現実的であると考えられる。その研究の道具として、直交多項式の 3 項再帰関係

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \omega_n P_{n-1}(x)$$
 が重要であり、Boas-Buck 母関数とこの式が導く関係を明らかにする。

$h(x) = \exp[x]$ および $1/(1-x)$ の場合に測度を具体的に求めるためには、それぞれ Laplace 逆変換や Hilbert 逆変換が重要な役割を果たした。より一般の $h(x)$ にたいしては未知の関数変換および逆変換が現れるが、それを取り扱う技法を開発するか他の手段を発見することが必要となり、その点を研究分担者の岩田の協力により探求する。このようにして得られた結果を one mode Fock 空間への適用など白色雑音解析の研究を連携研究者の齊藤・浅井の協力を得て行う。

別な視点として、連携研究者の谷口と行ってきた古典力学系に基づく乱数発生の研究とそのウィナーカオスへの適用の問題を深化させる。さらには、研究協力者の池田・中田と共にランダムアルゴリズムの研究を行う。特に、グラフ上のランダムウォークを設計して最小のカバー時間を実現させることを考察する。

課題研究を遂行するため、初年度に分担者・連携研究者を中心とした打ち合わせ会を名城大学で開き研究方針を検討した。また各年度毎に、研究成果の確認し、関連分野の研究情報の収集を行い、その後の研究方針を立てるための研究集会を広島大学・福岡教育大学・愛知教育大学で開催した。

4. 研究成果

R 上の確率測度の MRM 適用可能性、あるいは直交多項式の Boas-Buck 母関数の研究においては次のような成果があった。

3 項再帰関係を満たす MRM-triple について、

- (1) その条件を過剰決定的な無限次元代数方程式系で与える補題を得た。
- (2) 与えられた $h(x)$ に対して、それを MRM 因子にもつ場合の Jacobi-Szegoe パラメーター $\{\alpha_n, \omega_n\}$ を 4 つのパラメーターを用いて与える補題を得た。
- (3) 与えられた $\{\alpha_n\}$ あるいは $\{\omega_n\}$ に対して、 $h(x)$ を 4 つのパラメーターを用いて与える補題を得た。
- (4) 場合によっては、 $\rho(t)$, および $B(t)$ の満たすべき微分方程式系を与えた。

以上の補題を活用して、初等的だがとても複雑な場合分けと無限次元方程式の低次の部分と微分法方程式を解くことで以下のことが明らかになった。

- (1) $h(x) = (1-x)^{-\kappa}$ を MRM 因子にもつ測度は区間 $[0, 1]$ 上の特殊な beta 分布に限る。

- (2) Meixner クラスの分布で $h(x)=\exp[x]$ 以外の MRM 因子を持つものは, gamma 分布, 標準正規分布, 特殊な Meixner 分布と特殊な負の 2 項分布の 1-シフトに限る。そのとき $h(x)$ としては, ある種の超幾何関数が現れる。
- (3) 区間 $[0, 1]$ 上の beta 分布の MRM 因子は 2 つの超幾何関数のみである。
- (4) 超幾何関数 $F(-; \kappa; x)$ は gamma 分布に対して MRM 因子であり, $\kappa=1/2, 3/2$ のときには, それぞれ 3 系統の測度 (直交多項式) が対応する。特別な例として, Wilson 多項式 (1980) の特別な場合を含んでいる。
- (5) 2 つの MRM-triple をもつものの中に, 非常に特殊な関係
- $$h_o(x) = (xh(x))', \quad B_o(t) = (tB(t))',$$
- $$\rho_o(t) = \rho(t) = tB(t)$$
- を満たす場合がある。これらを双子 triple と呼び, 特別な $\{\alpha_n\}$ の場合に全て決定し, 結果を学会で発表するとともに論文を投稿中である。

今後の研究の展望を述べる。特別な $\rho(t)=t$ の場合は, Brenke の母関数と呼ばれるが, 今回の研究を開始する段階では問題意識はあっても解明する手段がなかった。上で述べた補題を適用することで, 直交多項式の Brenke の母関数を決定できて, 論文を準備中である。この問題自体は, Chihara (1960) が異なった手法で論じて殆どおなじ結果を得ているが, 幾つかの場合が抜けている。彼は指摘していないが, 現れる直交多項式は q -変形と呼ばれるもので, MRM 因子は q -basic series (q -超幾何関数) である。上で述べた結果から, MRM 因子は全て超幾何関数であると予想していたが, その q -変形も視野に入れることが必要になった。今回の研究手法による解明は手法としては単純だが, 計算の複雑さから限界にあり, 新たな手法の開発, もしくは新方針の樹立が望まれる。

乱数発生やランダムアルゴリズムに関しては, 谷口の非再帰的乱数生成法の性質を力学的立場から理論的に解明できた。また, 池田・山下とともに, グラフの被覆時間を激減させる遷移確率を定めるアルゴリズムを与えた。また, 中田と共に, クーポン集めの問題の分布の厳密解と極限分布を求めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

1. Issei Kitagawa, Kimiaki Saito and Allanus H. Tsoi: A characterization of the geometric Brownian motion in terms of

infinite dimensional Laplacians, Random Operators and Stochastic Equations, **19** (2010), 91–103 (査読有)

2. Izumi Kubo and H.-H. Kuo: MRM-factors for the probability measures in the Meixner class, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, **13** (2010), 525–550. (査読有)
3. Izumi Kubo, H.-H. Kuo and Suat Namli: On the applicability of multiplicative renormalization method for certain power functions, QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis **25** (2010), 216–229. (査読有)
4. 谷口礼偉, 高嶋恵三, 上田澄江: 新しい非再帰型擬似乱数生成法とその応用, 統計数理研究所共同研究レポート, **235** (2010), 1–95 (査読無)
5. Satoshi Ikeda, Izumi Kubo and Masafumi Yamashita: The hitting cover times of random walks on finite graphs using local degree information, Theoretical Computer Science **410** (2009), 94–100. (査読有)
6. Izumi Kubo: Generating functions of Jacobi polynomials, Communications of Stochastic Analysis, **3** (2009), 249–267. (査読有)
7. Izumi Kubo and H.-H. Kuo: MRM-applicable orthogonal polynomials for certain hypergeometric functions, Communication of Stochastic Analysis, **3** (2009), 383–406. (査読有)
8. Koichiro Iwata and Torbjorn Kolsrud: Central limit theorem for constrained Poisson systems, Bull. Sci. Math. **133** (2009), 658–669. (査読有)
9. Kimiaki Saito: A Gauss-Poisson correspondence and the Levy Laplacian., Interdiscip. Inform. Sci. **15** (2009), 431–440. (査読有)
10. Luigi Accardi, Un Cig Ji and Kimiaki Saito: Exotic Laplacians and associated stochastic processes. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **12** (2009), 1–19 (査読有)
11. Nobuhiro Asai: The construction of subordinated probability measures on \mathbf{C} associated with the Jacobi-Szegoe parameters. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **12** (2009), 401–411. (査読有)
12. Izumi Kubo, H.-H. Kuo and Suat Namli: Applicability of multiplicative renormalization method for a certain function, Communications on Stochastic Analysis **2** (2008), 405–422. (査読有)
13. Hirotake Yaguchi and Izumi Kubo: A new nonrecursive pseudorandom number

generator based on chaos mappings, Monte Carlo Methods Appl. 14 (2008), 85–98. (査読有)

14. Kimiaki Saito, Kazuyuki Sakabe and Kazumasa Hirose: A Gauss-Poisson correspondence and infinite dimensional Laplacians. Far East J. Math. Sci. (FJMS) **31** (2008), 31–47. (査読有)
15. Kimiaki Saito and Kazuyoshi Sakabe: An infinite dimensional Fourier-Mehler transform and the Levy Laplacian. QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **22** (2008), 149–160. (査読有)
16. Nobuhiro Asai: Hilbert space of analytic functions associated with a rotation invariant measure. QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **23** (2008), 49–62. (査読有)
17. Kimiaki Saito: Infinite dimensional stochastic processes associated with the exotic Laplacians, 数理解析研究所講究録 **1609** (2008), 49–62. (査読無)

[学会発表] (計 2 1 件)

1. 久保泉: 直交多項式の Boas-Buck 母関数, 日本数学会中国・四国支部例会, (30 Jan 2011) 鳴門地場産業振興センター、鳴門市
2. Koichiro Iwata: A hierarchy of differential equations for two dimensional random fields representing modular forms, Probability and PDE 2011 (12 Jan 2011) 広島大学、東広島市
3. Nobuhiro Asai: Probability measures on \mathbf{C} associated with the Jacobi parameters of continuous dual Hahn Polynomials, The 6th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (10–12 Jan 2011) National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea
4. Nobuhiro Asai: Probability measures on \mathbf{C} arising from continuous dual Hahn polynomials with special parameters, 10th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (16–17 Dec 2010) 東北大学 仙台市
5. 久保泉: Multiplicative renormalization method 適用可能な測度の決定(III)、日本数学会 (22–25 Sept 2010) 名古屋大学、名古屋市
6. Nobuhiro Asai: The construction of various non-Gaussian probability measures on \mathbf{C} , 13th Workshop: Non-Commutative Harmonic Analysis, (11–17 July 2010) The Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland

7. Kimiaki Saito: Exotic Laplacians and higher order derivatives of white noise, IDAQP Sendai Seminar (24–25 June 2010) 東北大学, 仙台市

8. 久保泉: Multiplicative renormalization method 適用可能な測度の決定(II)、日本数学会 (24–27 March 2010) 慶応義塾大学、横浜市
9. 谷口礼偉: 並列計算に適した非再帰型疑似乱数 SSI32(ISMLIB) の紹介、物理乱数・疑似乱数の発生法・検定法とその周辺 (12 March 2010) 統計数理研究所、東京都
10. Nobuhiro Asai: The subordinated probability measure associate with the Jacobi parameters, The 5th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, (6–8 Jan 2010) : Chungbuk National University, Cheongju, Korea
11. Nobuhiro Asai: Bargmann-like measures related with the classical orthogonal polynomials, The 30th Conference on Quantum Probability and Related Topics, (23–28 Nov 2009) Pontificia Univesidad Catoelica de Chile, Santiago, Chile
12. Koichiro Iwata: On a semigroup of optimal stopping times, Russian-Japan Symposium on Stochastic Analysis of the Advanced Statistical Models, (16 Sept 2009) Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia
13. Nobuhiro Asai: The construction of probability measures related with the Jacobi-Szegoe parameters, 9th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, (11–12 Sept 2009) 東北大学、仙台市
14. Nobuhiro Asai: Probability measures on \mathbf{C} associated with the Jacobi-Szegoe parameters of orthogonal polynomials, 12th Workshop: Non Commutative Harmonic Analysis, (16–22 Aug 2009) The Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland
15. 久保泉: Multiplicative renormalization method 適用可能な測度の決定(I)、日本数学会(27–30 March 2009) 東京大学、東京都
16. 中田寿夫, 久保泉: 当たりのあるクーポンあつめの問題について、日本数学会 (27–30 March 2009) 東京大学、東京都
17. Nobuhiro Asai: The Meixner operators on one-mode Fock space and related topics, The 3th Cheongju Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, (12–14 Jan 2009) Chungbuk National University, Cheongju, Korea

18. 谷口礼偉: 非再帰型擬似乱数 SSI32 のハッシュ関数および再帰型擬似乱数への応用、「統計学における乱数」研究会(12 Dec 2008) 統計数理研究所、東京都
19. Kimiaki Saito: Exotic Laplacians and exponential functions of white noise, The 8th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (10 Nov 2008) 東北大学、仙台市
20. Nobuhiro Asai: On interacting Fock spaces and integral transforms, The 29th Conference on Quantum Probability and Related Topics (13-18 Oct 2008), Hammamet, Tunisia
21. Koichiro Iwata: Correlation functions of random fields over elliptic Curves and modular forms, Stochastic Analysis and Applications, (8 Sept 2008) 九州大学, 福岡市

[その他]

ホームページ等

ソフトウェアの公開

1. ISMLIB (統計数理研究所ソフトウェア・データライブラリ) SSI32 (非再帰型擬似乱数 SSI32)

<http://www.ism.ac.jp/ismlib/jpn/ismlib/soft.html#ssi32>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

久保 泉 (KUBO IZUMI)

広島大学・大学院理学研究科・名誉教授

研究者番号：70022621

(2) 研究分担者

岩田 耕一郎 (IWATA KOICHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：20241292

(3) 連携研究者

谷口 礼偉 (YAGUCHI HIROTAKE)

三重大学・教育学部・教授

研究者番号：40157970

齊藤 公明 (SAITO KIMIAKI)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：90195983

浅井 暢宏 (ASAI NOBUHIRO)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：60399029

(4) 研究協力者

池田 諭 (IKEDA SATOSHI)

宮崎大学・工学部・准教授

研究者番号：70282796

中田 寿夫 (NAKATA TOSHIO)

福岡教育大学・教育学部・教授

研究者番号：10304693