

自己評価報告書

平成23年 5月 6日現在

機関番号：62603

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540147

研究課題名(和文) 測度空間における最適化の理論と計算手法およびその応用に関する研究

研究課題名(英文) Theory and Computational Methods of Optimization in Measure Spaces with Applications

研究代表者

伊藤 聡 (ITO SATOSHI)

統計数理研究所・数理・推論研究系・准教授

研究者番号：50232442

研究分野：統計数学

科研費の分科・細目：細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：無限計画・半無限計画・切除平面法・容量問題・モーメント問題・確率分布の推定・通信路容量・ロバスト最適化

1. 研究計画の概要

本研究課題の目的は、測度空間における最適化による分布の推定の理論と切除平面法に基づく計算手法の開発、また制御工学や統計科学に関わる諸問題への応用である。

1950年代から60年代にかけて研究された電磁気学の問題の一つに導体の電荷の分布を決定する容量問題があり、60年代後半には日本人数学者らにより線形計画の理論を用いて解の存在などの解析的性質が調べられた。この容量問題は数学的にはボレル測度の空間の上での不等式制約条件つき線形計画問題として定式化される。また同様に、古典的なモーメント問題も測度空間上の等式制約条件つき線形計画問題として一般化され、さらに全測度を1とする線形制約条件を付加すれば確率分布の推定問題となる。

本研究においてはまず、これらを含む測度空間上の凸計画問題に対する実用的な計算手法として双方向切除平面法の開発を行い、大域的収束性の証明、暫定解の信頼性の定量的評価に加え、緩和問題の近似的な求解や低次元化など局所的収束性の改良等について考察することを目標とした。

また応用面については、ゲーム理論やロバスト最適化また統計科学上の諸問題のみならず、ダイナミクスを内包する制御問題を対象とした。一般に測度は離散的な成分と絶対連続な成分の和であるが、それゆえ測度空間上の最適化問題は有限次元の最適化と関数空間における最適化を統一的に取り扱える可能性を秘めている。例えば、微分方程式系で支配されるシステムの最適制御において状態不等式制約条件がある場合、これに対する双対変数は絶対連続成分と跳躍成分の重

ね合わせとなり、最適制御をその必要条件あるいは十分条件から解くことは数値的であっても一般には困難なものとなる。本研究ではこのような問題に対して実用的な解法を提供することも目標の一つとした。

2. 研究の進捗状況

(1) 双方向切除平面法の開発

測度空間上の等式および不等式制約条件つき凸最適化問題に対する実用的な数値解法として双方向切除平面法の開発を行った。

一般に切除平面法に限らず反復近似解法である緩和法は各反復における目的関数値の単調性を重要な特徴として持つ。本研究においては、制約条件だけでなく決定変数(測度)をも同時に緩和する双方向の(このため必ずしも単調性を持たない)切除平面法を開発した。双方向切除平面法では各反復において有限次元の緩和問題とその双対を同時に解く必要がある。単方向の切除平面法においては必ずしも緩和問題の双対を解く必要がないことを考えれば、本手法は主双対切除平面法とも呼ぶべきものである。本研究においては、まず簡単な仮定のもとで同手法の最適解への大域的収束を示し、各反復における最適目的関数値との誤差の上限を制約の侵害量を用いて評価した。すなわち有限回の反復で中断したとしても、その時点での暫定解の信頼性が定量的に評価できるという特徴を持つ。また実用的な実装を目指して、各反復における緩和問題の近似的な求解と低次元化、さらに決定変数を絶対連続な測度に制限したときの切除平面法の漸近的な振舞いについて考察した。

(2) 諸問題への応用と非線形凸形式に対する理論の構築

応用という観点からすると、本研究課題において構築する理論・計算手法の非線形凸形式への拡張がとりわけ重要となる。研究計画調書の段階では思いもよらなかったが、情報理論における通信路容量の問題は測度空間上の非線形凸計画問題の一例である。通信路容量とは雑音のある通信路において単位時間に送ることができる情報量の上限であり、具体的には確率測度として表現される入力分布と通信路自体により定義された相互情報量を適当な制約のもとで入力分布に関して最大化することによって得られる。通信路容量を達成する入力分布は離散分布になることが多いが、既存の研究は複素関数論に基づいているためこの説明は一入力一出力系にしか適用できない。本研究によれば半無限計画の理論を用いて最適な分布が離散的になる理由を明らかにすることができ、さらに多入力多出力系すなわちベクトル通信路へ拡張する道が開けた。

またロバスト最適化問題への応用として、スポーツリーグ戦において特定順位以上（以下）以下を確定する最小の勝数（敗数）の計算方法について考察し、勝率に基づいて順位が定まるプロ野球リーグ戦に適用した。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

（理由）まず計算手法の開発という面では目標通り順調に進展している。一方応用面については、研究計画調書の段階ではダイナミクスを内包する制御問題を主な対象としていたが、その後情報理論における通信路容量の問題がより自然な測度空間上の非線形凸計画問題になっていることがわかり、研究の比重も前者から後者へ移りつつある。しかしながら、いずれの分野への応用であっても、本研究で構築する理論・計算手法の非線形凸形式への拡張という点ではおおむね順調な進展と判断してよいと思われる。

4. 今後の研究の推進方策

応用面での研究の比重を制御問題から通信路容量問題へ移し、より自然な形で測度空間上の非線形凸形式への理論の拡張を試みる。

5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計3件）

- ① S. Ikeda and S. Ito “Min-max strategy for prediction,” 土谷隆（編），最適化：モデリングとアルゴリズム 24（統計数理研究所共同研究レポート 267），pages 15-23, 2011, 査読無
- ② S. Ito and S. Ikeda, “Capacity-

achieving probability measure in communication channels,” X. Sun and X. Bai (eds.), *Book of Abstracts of the 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications*, page 98, 2010, 査読無

- ③ S. Ito, S. Y. Wu, T. J. Shiu and K. L. Teo, “A numerical approach to infinite-dimensional linear programming in L_1 spaces,” *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol. 6, pages 15-28, 2010, 査読有

〔学会発表〕（計6件）

- ① 伊藤 聡, 離散的最適化とサービス科学, 科研費研究集会「リスク評価と最適化に関する研究集会」, 京田辺, 2010/12/26
- ② S. Ito and S. Ikeda, “Capacity-achieving probability measure in communication channels,” The 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications, Shanghai, China, 2010/12/11
- ③ 伊藤 聡, 測度空間における凸最適化, 統計数理研究所共同研究集会「確率測度の最適化と通信路容量」, 東京, 2010/7/27
- ④ 池田思朗, 伊藤 聡, 区間推定と予測分布について, 統計数理研究所共同研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」, 東京, 2010/3/23
- ⑤ S. Ito “A bilateral cutting framework for infinite-dimensional optimisation,” RMIT University Mathematics Colloquium, Melbourne, Australia, 2008/5/9

〔産業財産権〕

○出願状況（計2件）

名称：計測点算出装置及び方法

発明者：村瀬道夫、土谷 隆、伊藤 聡、石黒真木夫、上野玄太、染谷博司

権利者：大学共同利用機関法人情報・システム研究機構、株式会社小野測器

種類：特許

番号：特願 2010-145615

出願年月日：22年6月25日

国内外の別：国内

名称：演算装置及び演算方法

発明者：伊藤 聡、大場信之介

権利者：大学共同利用機関法人情報・システム研究機構、一般社団法人共同通信社

種類：特許

番号：特願 2010-169244

出願年月日：22年7月28日

国内外の別：国内