

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 21 日現在

機関番号： 10101

研究種目： 基盤研究（C）

研究期間： 2008 ～ 2011

課題番号： 20540149

研究課題名（和文） 多重線形調和解析とその応用の研究

研究課題名（英文） Reseach on multilinear harmonic analysis and its applications

研究代表者

立澤 一哉（TACHIZAWA KAZUYA）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号： 80227090

研究成果の概要（和文）：多重線形作用素の例として、多重線形擬微分作用素の研究を行った。特に幾つかのヒルベルト空間の積空間上において、多重線形擬微分作用素がシャッテン-フォンノイマンクラスに属するための表象の条件を求めた。また重み付きヘルツ空間のウェーブレットによる特徴付けを与えた。またさらに重み付き  $p$  乗可積分空間のウェーブレットによる特徴付けを用いて、ベッセルポテンシャルに関するソボレフ-リーブ-ティールリング不等式を証明した。

研究成果の概要（英文）：As an example of multilinear operators we studied multilinear pseudo-differential operators. In particular we got a condition of the symbol of multilinear pseudo-differential operators defined on products of a Hilbert space, which belong to the Schatten-von Neumann class. Moreover we provided the wavelet characterization of the weighted Herz spaces. Moreover we proved the Sobolev-Lieb-Thirring inequality with respect to the Bessel potentials by means of the wavelet characterization of weighted  $L_p$  spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 調和解析 多重線形 ウェーブレット

## 1. 研究開始当初の背景

解析学における様々な定理において、正則性あるいは微分可能性の仮定を可能な限り緩めることは、その定理の適用範囲を調べるという点で興味ある問題である。このような問題を研究する際に、実解析あるいは調和解析の手法が有効である。実際カルデロンが1950年代に特異積分作用素の研究を始めた

動機の1つは、正則性の少ない係数を持つ偏微分作用素の研究にあった。このカルデロンによる特異積分作用素の研究は、その後1970年代に一般化され、たたみ込みの形ではない一般の積分核を持ついわゆるカルデロン-ジグメント作用素の研究として発展した。またカルデロンは、正則性の少ない係数を持つ偏微分作用素の成す代数の研究から、特異積分

作用素と掛け算作用素との高次交換子の研究の重要性を指摘した。この高次交換子の関数空間における有界性の評価や、加藤のスクエアルート問題などにおけるある種の逆問題あるいは逆作用素の評価において、多重線形作用素の重要性が明らかになってきた。

多重線形作用素の先駆的研究は 1970 年代のコイフマン・メイエによる多重線形フーリエマルチプライヤーの研究に始まる。彼らの理論は、リプシッツ曲線に対応したコーシー積分の有界性の評価に応用された。その後多重線形作用素の理論は様々な問題に応用されており、例えばクリストとキセレフは、多重線形作用素の理論を 1 次元シュレディンガー作用素の WKB 解析に応用した。さらにコリアンダーやキールらは、多重線形作用素の評価を KdV 方程式などの非線形偏微分方程式の研究に応用した。

一方レーシー・ティエによる相空間のタイル分解を用いた手法の開発により、双線形ヒルベルト変換などの、滑らかでない表象を持つ作用素の解析が可能となった。このような研究の中で、特にグラフィコスとトレスは、多重線形カルデロン-ジグムント作用素の系統的な研究をウェーブレットを用いて行い、基本的な性質を明らかにした。

一方研究代表者は、ウェーブレット型の関数列を用いた種々の作用素の研究を行っており、この手法を多重線形作用素に応用するという考えは自然なものであった。そこで研究代表者は、グラフィコスとトレスの研究をさらに深化させる研究の着想に至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、種々の多重線形作用素の性質とその応用の研究である。特にグラフィコスとトレスの研究を推し進めて、多重線形カルデロン-ジグムント作用素の、重み付き  $p$  乗可積分空間あるいは一般の重み付きトリーベル-リゾルキン空間上での有界性の問題を、ウェーブレットを用いて研究し、この有界性を用いて、重みの付いていない場合に考えられてきた様々な問題、例えば高次交換子作用素の有界性やリプシッツ曲線上のコーシー積分作用素の有界性、あるいは加藤のスクエアルート問題に応用することである。

まず最初に重み関数のクラスとして、どのようなものを用いれば良いかということをも明らかにする。通常のカルデロン-ジグムント作用素に関する重み付き不等式においては、重み関数のクラスとして  $A_p$  関数が用いられる。この  $A_p$  関数のクラスを、多重線形作用素の場合にも同様に用いることができるのか、あるいは全く新しい重み関数のクラスが必要なのかを明らかにする。その上で重み付き不等式における指数の関係を求め、多重線形カルデロン-ジグムント作用素の重み

付き関数空間における有界性を証明する。

このような多重線形カルデロン-ジグムント作用素の種々の重み付き関数空間における有界性が明らかになれば、多重線形フーリエマルチプライヤーの理論あるいは多重線形擬微分作用素の理論に応用できる。特に多重線形擬微分作用素の特異値を評価することにより、作用素の属するクラスを明らかにする。これは通常の擬微分作用素についてのシャッテン-フォンノイマンクラスに相当する作用素族の研究であり、いわゆるコンパクト作用素の分類という観点からも、興味ある話題である。

またさらに高次交換子作用素の有界性の研究や、リプシッツ曲線に対応したコーシー積分作用素の研究に応用が期待され、またこれらの研究を通じて、係数の正則性の少ない偏微分作用素の研究や、正則性の少ない境界を持つ領域におけるディリクレ問題の解の研究などに応用する。また対応する重み付き不等式を、非線形シュレディンガー方程式や KdV 方程式の解の存在や適切性など、従来多重線形作用素の理論が用いられていた問題に応用することにより、新しい結果を得る。

## 3. 研究の方法

まず最初に多重線形カルデロン-ジグムント作用素のウェーブレットによる特徴付けを研究し、それを用いた重み付き  $p$  乗可積分空間あるいは重み付きトリーベル-リゾルキン空間における多重線形カルデロン-ジグムント作用素の有界性を研究する。特に重み関数としてどのようなものを採用すればよいかを明らかにする。これらの研究を達成するためには、グラフィコス-トレスの結果や、重み付き関数空間のウェーブレットによる特徴付けとその応用に関する、研究代表者の以前の研究が参考になるものと思われる。そしてそれらの結果を用いて、高次交換子作用素の有界性を示し、さらに正則性の少ない偏微分作用素の研究を行う。

そのために研究分担者あるいは連携研究者と情報交換し、またセミナーを開いて研究を行う。特に研究分担者の林は研究代表者に関数解析の知識を提供し、また連携協力者の堀内は、研究代表者に偏微分方程式の知識を提供する。さらに国内外の様々な研究集会に参加し、最新の知識を吸収する。具体的には、春及び秋の日本数学会年会及び秋季分科会や、実解析学シンポジウムあるいは調和解析セミナー、あるいは調和解析と非線形偏微分方程式研究集会などである。また実解析、関数解析、偏微分方程式関係の書籍を購入することにより、最新の知識を吸収する。

## 4. 研究成果

(1) まず多重線形擬微分作用素の研究を行った。特に幾つかのヒルベルト空間の積空間上において、多重線形擬微分作用素がシャッテン-フォンノイマンクラスに属するための表象の条件を求めた。このような作用素のクラスは、ペートル、コボス、ピエチュなどにより研究されているが、まだ多くのことは分かっていない。そこで本研究においては、 $n$ 次元ユークリッド空間における2乗可積分関数の成すヒルベルト空間の積空間上で定義された多重線形擬微分作用素について、シャッテン-フォンノイマンクラスの作用素族に属するための条件を研究した。具体的には、多重線形擬微分作用素の表象と呼ばれる関数がどのような条件を満たせば、どのシャッテン-フォンノイマンクラスに属するかを明らかにした。ただし、本研究で定義したシャッテン-フォンノイマンクラスは、ペートルやコボスらが定義した作用素のクラスとは少々異なるものである。この研究には、研究代表者が以前研究していた擬微分作用素の特異値の評価において用いた手法、すなわちウィルソン基底やガボールフレームの理論が用いられる。これにより、作用素の表象の遠方での減少の様子を調べることにより、作用素の属するクラスを判定できる。また関連して通常の擬微分作用素がデクスミエクラスに属するための表象の条件を得た。これはコンヌの非可換幾何学における量子化との関連から、興味深い結果である。

(2) また本研究において、多重線形カルデロン-ジグムント作用素のウェーブレットによる近似対角化がどのようなものになるかを研究した。ここで得られた結果は、上記の擬微分作用素のウィルソン基底による解析によって得られた評価と同様のものである。

(3) また本研究においては、重み付きヘルツ空間のウェーブレットによる特徴付けを与えた。同様の重み付きヘルツ空間についてのベクトル値型不等式については、タン-ヤンの結果があるが、彼らの結果には誤りがある。そこで本研究では、彼らの結果を修正した形で、重み付きヘルツ空間のウェーブレットによる特徴付けを与えた。

(4) 重み付き  $p$  乗可積分空間のウェーブレットによる特徴付けを用いて、ベッセルポテンシャルに関するソボレフ-リープ-ティーンリング不等式を証明した。この証明で用いられる手法は、通常のウェーブレットによる関数空間の特徴付けだけではなく、スケール関数も同時に用いる形のものである。

(5) キャファレリ-コーン-ニーレンベルグ型の不等式と関連した話題を研究した。すなわちこの不等式を変分問題の解の存在あるいは非存在の問題として捉え、不等式における最良定数を決定し、また漸近挙動を調べた。この結果は、従来知られていたものを一般化

し、またさらに精密にしたものである。

(6) またリーマン面の幾何学形状とその上の有界正則関数の解析的振る舞いを研究した。リーマン面を定めれば、その上の有界正則関数の全体は定まるが、この逆は有界正則関数環については自明ではない。この同型問題が肯定的に解かれるための十分条件についての部分的結果を得た。

今後は本研究の結果を更に推し進めて、多重線形作用素の研究を深め、解析の様々な問題に応用していきたいと考えている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

1. Toshio Horiuchi and Peter Kumlin, The Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities involving critical and supercritical weights, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci. 88(1), 1--6, 2012, 査読有
2. Kazuya Tachizawa, Wavelet characterization of weighted spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B22, 61--70, 2010, 査読有
3. Kazuya Tachizawa, Schatten-von Neumann classes of multilinear pseudodifferential operators, 研究集会 Harmonic analysis and its applications at Tokyo 2008 報告集, 114--122, 2009, 査読無
4. Mitsuo Izuki and Kazuya Tachizawa, Wavelet characterizations of weighted Herz spaces, Scientiae Mathematicae Japonicae, 67(3), 353--363, 2008, 査読有
5. Toshio Horiuchi, Kato's inequalities for degenerate quasilinear elliptic operators, Kyungpook Mathematical Journal, 48(1), 15--21, 2008, 査読有

[学会発表] (計1件)

1. Kazuya Tachizawa, Schatten-von Neumann classes of pseudodifferential operators, 研究集会 Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2008, 2008年10月11日、首都大学東京

[図書] (計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

立澤 一哉 (TACHIZAWA KAZUYA)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号：80227090

(2) 研究分担者

林 実樹廣 (HAYASHI MIKIHIRO)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：40007828

(3) 連携研究者

堀内 利郎 (HORIUCHI TOSHIO)  
茨城大学・理学部・教授  
研究者番号：80157057