

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 28 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540154

研究課題名（和文） 記憶項を伴う双曲型方程式の位相解析的研究

研究課題名（英文） Functional analytic research of hyperbolic equations with memory

研究代表者

岡 裕和（OKA HIROKAZU）

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：90257254

研究成果の概要（和文）：

記憶項を伴う双曲型方程式とその関連分野に関して、方程式を一般的かつ組織的に取り扱うための「理論構築」および方程式が働く場である「関数空間」の双方の観点から研究を行った。その結果、準線形および半線形発展方程式の時間大域的な古典解を求めるための抽象理論を構築し、解析関数空間や Bloch 空間上の荷重合成作用素や合成作用素の特徴づけが得られた。また、 q -変形正規作用素に 1 対 1 対応する縮小作用素の特徴付けも与えた。

研究成果の概要（英文）：

A hyperbolic equation with memory and its related field are studied from the viewpoint of both sides of "theory consideration" to deal with the equation generally and systematically and "the functional space" in which the equation works place.

As a result, abstract theories are developed to get global classical solutions for quasilinear /semilinear evolution equations, and the characterizations are obtained of weighted composition operators on analytic function spaces and on the Bloch space. We also provided with the characterization of the contraction which corresponds injectively to the q -deformed normal operator.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：実解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：準線形双曲型方程式，リプシッツ作用素半群，半線形発展方程式， q -変形正規作用素，解析関数空間，荷重合成作用素，Bloch 空間

1. 研究開始当初の背景

記憶項を伴う双曲型方程式は粘弾性体の方程式のモデルとして重要であり最近でも研究されているが、多くの場合、方程式のもつ特性を生かしながら、個別的に研究されている。これらの個別的な考察から系統的な性質を見い出し、方程式の可解性を位相解析的手法を用いて統一的に研究することは興味深い。このような問題意識のもとに、科学研究費補助金を受けて「双曲型ヴォルテラ方程式の可解性の研究」(研究代表者:岡裕和; 2005年度~2007年度)を実施し、半形発展方程式に対するコーシー問題の軟解を与える局所リップシッツ作用素半群の概念を導入し、そのような局所リップシッツ半群の特徴付けを行った。また、バナッハ空間で必ずしも稠密とは限らないような閉線形作用素の族に支配される発展方程式の初期値問題を研究した。本研究は、これらの研究成果を踏まえて、記憶項を伴う双曲型方程式とその関連分野について研究を実施する。

2. 研究の目的

記憶項を伴う双曲型方程式の1つの典型的な問題として、1次元粘弾性体のモデルに対する initial-history value problem があり、特に、記憶項が初期時刻では無限大で、時間の経過とともに減衰していく場合が物理的にも重要である。本研究ではこの問題に対する数学的な解析を進展させるとともに、記憶項を伴う双曲型方程式をより一般的かつ組織的に取り扱えるような枠組みを提供すること、これが研究の全体構想である。さらに、関連分野の研究も同時に平行して行うことで本研究課題解決への手がかりを探ることも本研究の目的の1つである。

3. 研究の方法

記憶項を伴う双曲型方程式とその関連分野に関して、方程式を一般的かつ組織的に取り扱うための「理論構築」および方程式が働く場である「関数空間」の双方の観点から研究を行うことを意図している。本研究組織はこのような学術的観点から構成されている。「理論構築」の研究は、すでに得られている研究成果等を踏まえつつ、研究代表者が中心になって行う。ヒルベルト空間上の作用素論的側面、解析関数空間およびハーディー空間それぞれの専門家(平澤、植木、細川)が研究代表者と同一の研究機関に所属しており、「関数空間」の研究分担者として本研究に参画する。連携研究者の田中は準線形発展方程式の時間大域的可解性に関する研究を精力的に行っており、「理論構築」への協力を担当する。

4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りである。

- (1) 準線形双曲型方程式が一意的な時間大域解をもつと仮定するとき、解を記述する関数と準線形作用素から生じる作用素族を生成素にもつ発展作用素の存在を示し、解の一意性により、両者を結びつける等式を導出した。これを用いて、準線形双曲型方程式に附随するリップシッツ作用素半群の概念を導入したことが本研究手法の特色である。このクラスのリップシッツ作用素半群に対する積公式を、準線形作用素に課す整合性条件から生じる誤差項を許容する近似解をうまく構成し、その近似解と離散半群の差を詳細に評価することで証明した。その結果、加藤理論の時間大域的理論への拡張に成功した。
- (2) 微分方程式に対する viability の考察の歴史は、南雲の定理までさかのぼり、抽象空間における viability が考察されてきている。本研究では、確率微分方程式に対する viability を証明するために、その問題を発展作用素の生成の間

題に翻訳し考察した。この手法が特色ある点である。Aubin と Da Prato による有限次元の結果をヒルベルト空間の場合へと拡張することに成功した。

- (3) 解析関数空間上の荷重合成作用素や合成作用素の性質を、作用素を構成する正則関数 u および正則写像 ϕ の持つ函数論的性質を用いて特徴付ける研究を行った。ベルグマン空間の間に作用する荷重合成作用素の順序有界性を、 u と ϕ 、再生核関数から構成される関数の可積分性により特徴付けた。また、ベルグマン・オーリッツ空間上の合成作用素の研究では、一般化されたネバンリンナの個数関数を導入し、消滅カールソン測度条件および境界点における ϕ の角微分係数の非存在性により、コンパクト性が特徴付けられることを明らかにした。
- (4) Bloch 空間から H^∞ への荷重付き合成作用素の差の有界性とコンパクト性を特徴付けた。また、荷重付き合成作用素の差の作用素ノルムと本質ノルムの評価も与えた。
- (5) 半円発展方程式の時間大域的な古典解を求めるための抽象的な枠組みを提案した。その枠組みの特色は、主部である線形作用素の定義域が考えている空間で稠密とは限らない点、及び、解の低階のエネルギー評価に対応する『近似解に対する増大条件』を課すだけで、解の高階のエネルギー評価を導出できて、それがゆえに時間大域的な古典解が得られる設定になっている点である。これらの特徴を備えた偏微分方程式として、強い粘性を伴う準線形双曲型偏微分方程式、及び、Zakharov 方程式などが挙げられる。これらの方程式の時間大域的可解性の問題へ得られた定理を応用した。
- (6) ヒルベルト空間における作用素論的な側面からの研究として、 q -変形正規作用素に 1 対 1 対応する縮小作用素の特徴付けを行った。また、ヒルベルト空間型の 1 次のソボレフ空間と 2 次のソボレフ空間の距離の値の代数的性質を調べた。
- (7) 2 つの単位的半単純可換 Banach 環の間の全射な写像のうち、スペクトル半径を

保存しているときの写像の形を決定した。

- (8) 重み付き Hardy 空間の間に作用する荷重合成作用素とチェザロ型積分作用素の有界性とコンパクト性を特徴付けた。
- (9) 単位球上の N 変数重み付き Bergman 空間の間に作用する荷重合成作用素の本質ノルムに対する評価を Carleson 型測度条件と Berezin 型積分変換を用いて与えた。

今後は研究課題「記憶項を伴う双曲型方程式の適切性に関する研究」(研究代表者：岡裕和；2012 年度～2015 年度)が新規に採択されたのを受けて、引き続き、本研究を継続し発展させていく。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① 植木 誠一郎, 『Order bounded weighted composition operators mapping into the Bergman space』, Complex Anal. Oper. Theory, 印刷中, 査読有
- ② A.K. Sharma, 植木 誠一郎, 『Compactness of composition operators acting on weighted Bergman-Orlicz space』, Ann. Polon. Math. 印刷中, 査読有
- ③ 田中直樹, 『A product formula for semigroups of Lipschitz operators associated with abstract quasilinear evolution equations』, Math. Nachr. 285 (2012), 507—527, 査読有
- ④ 田中直樹, 『A viability theorem of stochastic semilinear evolution equations』, Israel Journal of Mathematics. 186(2011), 1—43, 査読有
- ⑤ 細川 卓也, 大野 修一, 『Differences of weighted composition operators acting from Bloch space to H^∞ 』, Trans. Amer. Math. Soc. 363(2011), 5321—5340, 査読有
- ⑥ 岡 裕和, 田中直樹, 『Global solvability for abstract semilinear evolution equations』, Math. Nachr. 283(2010), 1171—1193, 査読有
- ⑦ 平澤 剛, 『The q -deformed normal operator and its corresponding contraction』, Far East J. Math. Sci. 46(2010), 101—106, 査読有
- ⑧ Stevic Stevo, 植木 誠一郎, 『Weighted

composition operators and integral-type operators between weighted Hardy spaces on the unit ball』, Discrete Dyn. Nat. Soc. 2009, 査読有

- ⑨ 植木 誠一郎, 『Essential norms of weighted composition operators between weighted Bergman spaces of the ball』, Acta Sci. Math. (Szeged) 7(2008), 829—843, 査読有

[学会発表] (計 6 件)

- ① 松本 敏隆, 増大度 α の解析的半群の非線形摂動, 日本数学会年会, 2012 年 3 月 28 日, 東京理科大学
- ② 松本 敏隆, 半線形放物型方程式に付随するリブシツ作用素半群に対する積公式, 日本数学会秋季総合分科会, 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学
- ③ 細川卓也, Extreme points of the closed convex hull of composition operators on H^∞ , 日本数学会秋季総合分科会, 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学
- ④ 平澤 剛, 対称作用素と自己共役作用素の位相的關係について, 関数環研究集会, 2009 年 11 月 26 日, 日本大学薬学部
- ⑤ 植木 誠一郎, 1 変数ベルグマン空間上のコンパクト荷重合成作用素について, 日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学
- ⑥ 植木 誠一郎, ベルグマン空間の間に作用する荷重合成作用素, 函数論シンポジウム, 2008 年 10 月 12 日, 高知大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡 裕和 (OKA HIROKAZU)
茨城大学・工学部・教授
研究者番号: 90257254

(2) 研究分担者

平澤 剛 (HIRASAWA GO)
茨城大学・工学部・教授
研究者番号: 10434002

植木 誠一郎 (UEKI SEIICHIROU)
茨城大学・工学部・准教授
研究者番号: 70512408

細川 卓也 (HOSOKAWA TAKUYA)
茨城大学・工学部・准教授
研究者番号: 90553579

(3) 連携研究者

田中 直樹 (TANAKA NAOKI)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号: 00207119