

機関番号： 1 3 1 0 1

研究種目： 基盤研究(C)

研究期間： 2008～2010

課題番号： 20540158

研究課題名(和文) バナッハ空間のノルム構造及び種々の定数についての研究とその応用

研究課題名(英文) The study of norm structure and various constants of Banach spaces, and its applications

研究代表者

齋藤 吉助 (SAITO KICHI-SUKE)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号： 30018949

研究成果の概要(和文): バナッハ空間のノルム構造を調べる上で、単位球の形状を調べることは重要であり、その形状によって多くの理論が成立し、或いは、不成立の場合と分かれ、数学の理論に大きく影響を与える。その単位球の構造を調べるために、単位球の構造を反映させる計量として、種々の幾何学的な定数が導入されている。その代表的なものとして、James 定数と von Neumann-Jordan 定数がある。その定数の計算はまだまだ調べられている例は少ない。そこで、この研究では、2次元空間 R^2 上の absolute normalized ノルムの端点について、James 定数の計算に成功した。

一方、ノルム空間の三角不等式の精密化を以前に発表したが、その不等式の証明の簡略化に成功し、更に、等号条件を求めた。さらにその応用について考察した。更に、富永と共同で Dunkl-William 不等式の研究に着手し、その作用素版についての不等式を得ることに成功した。

研究成果の概要(英文): To study norm structure of Banach spaces, it is important of considering the form of unit sphere of the space. Many mathematical results are dependent on the sphere. To do this, we have several geometrical constants of Banach spaces, for example, von Neumann-Jordan constant, James constant and so on. In this research, we calculate the geometrical constant of absolute normalized space R^2 . In particular, we calculate the James constant of extreme absolute normalized norms on R^2 .

On the other hand, we continued to study the refinement of sharp triangle inequalities. At first, we show another proof of sharp triangle inequality and we have the equality conditions of the inequalities. Further, we succeeded a generalization of the operator version of Dunkl-Williams inequality and so on.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野： 関数解析学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： バナッハ空間、James 定数、三角不等式

1. 研究開始当初の背景

Banach 空間の理論の研究は、2冊に纏められた本[W. B. Johnson and J. Lindenstrass, Handbook of the geometry of Banach spaces]にあるように多種多様に渡っているが、その中でノルム構造の研究は不等式の研究とも関連して重要であり、そのノルム構造によって、単位球の形状が決定される。例えば、単位球の丸さの概念として狭義凸性 (strictly convex) や一様凸性 (uniformly convex) など、真四角でないという概念として、uniformly nonsquare の概念が知られている。これらの概念は、Banach 空間の構造において重要な位置を占めている。例えば、Banach 空間が狭義凸ならば、Chebyshev の近似問題が一意解を持つことが知られている。

また、Banach 空間のノルム構造を調べる上で、その構造を反映させる計量として、Banach 空間の種々の定数が研究されている。それらの代表的なものとして von Neumann-Jordan 定数(以下 NJ 定数とする)や James 定数などがある。NJ 定数の概念は 1937 年 Clarkson によって定義されて以来、今日まで、研究が続いている。この定数の研究は、Banach 空間において中線定理が成り立たなさの度合いを表すものとして重要である。一方、James 定数は単位球の真四角さの度合いを表し、バナッハ空間の正規構造と関係して重要なものである。

この研究課題は、国内では、 L^p ノルム型の Banach 空間について NJ 定数や James 定数を研究し、それらの Banach 空間について特徴付けを研究していた。Banach 空間における absolute ノルムの構造は、斎藤-加藤-高橋により、 C^2 ではあるが、その上の absolute norm を凸関数の言葉で置き換えることにより、ノルムの構造がある凸集合上の凸関数の性質を調べればよいことを発見し、それにより、NJ 定数を具体的に計算することが出来た。それらの研究は画期的なものであり、今後更なる多くの発展と応用が見込まれ、この研究を推進することは、現在において急務の課題である。

最近、三角不等式の精密化に成功し、国内外から注目を集めており、これからの発展と応用が見込まれている。

本研究においては、米国の Dowling や西欧の Maligranda、Persson などのが興味を示しており、Clarkson 不等式や NJ 定数の研究ばかりでなく、James 定数など他の定数も盛んに研究が進展している。ごく最近、中国やタイの研究者もこの研究を始めている。そこで、これらの研究者と研究交流が推進できれば、これからの大きな発展が見込まれる分野であり、急務の研究課題である。

2. 研究の目的

この研究では、Banach 空間のノルム構造として、三角不等式、Clarkson 不等式や Hanner 不等式などの色々なノルム不等式を研究することにより、バナッハ空間の種々の定数の計算することを目指す。特に、absolute norm によって定義される Banach 空間を取り上げ、次の様な問題の解決を目指す。

(1) C^n 上の absolute norm と凸関数の関係を詳細に調べることにより、 C^n 上の様々なノルムに対して、NJ 定数や James 定数などを計算或いは評価する。

(2) Orlicz 空間、Lorenz 空間などの無限次元数列空間を詳細に調べることにより、absolute norm に対応する無限次元数列空間の構造を研究し、種々の定数について調べることにより、一様凸性、狭義凸性になるための条件を考察する。

(3) 三角不等式、Clarkson 不等式、Hanner の不等式などのノルム不等式を詳細に考察することにより、種々の定数との関係を考察する。

(4) c_p (Schatten p-class operator)、非可換積分空間や Banach 関数空間などの空間のノルム構造を調べることにより、種々の定数を具体的に計算する。

(5) Banach 空間の直和空間の構造を調べることにより、一様凸性、狭義凸性などのノルム構造を考察することにより他分野への応用を考察する。

3. 研究の方法

(1) Banach 空間の定数の研究は、単位球の形状の研究と関係して、単位球の丸さや真四角さを調べるのが重要である。それを表す計量として、多くの定数の研究がある。特に重要な von Neumann-Jordan 定数や James 定数などについて、今まで得られた結果を整理する。更に、 C^n 上の absolute norm と凸関数の関係を調べることにより、具体的に、von Neumann-Jordan 定数や James 定数の計算或いは評価を行う。さらに、無限次元数列空間への発展を考察する。

(2) Banach 空間のノルム構造について、特に、ノルム不等式関係の文献を詳細に調べ、整理することにより、von Neumann-Jordan 定数や

James 定数により、Banach 空間の構造を調べる。

(3) Banach 空間において、Clarkson 型不等式や Hanner の不等式などが成立する条件について考察し、Banach 空間の特徴付けを行う。更に、一様凸性や超回帰性などの概念と単位球の構造との関係などを調べるとともに、その応用を考察する。

(4) Orlicz 空間や Lorenz 空間において von Neumann-Jordan 定数や James 定数についての結果を調べる。また、Schatten p-class operator からなる空間 c_p における Clarkson の不等式を詳細に調べる事により、NJ 定数との関係を考察する。

(5) 作用素空間、特に、作用素イデアルについての結果を整理し、無限次元数列空間との対応を考察する。それにより、作用素イデアルにおいて、von Neumann-Jordan 定数や James 定数などを考察し、その構造を調べる。

(6) 無限次元数列空間の重要な例として、Lorenz 空間や Orlicz 空間における種々の定数について今までに得られている結果と比較しながら計算あるいは公式を作ることを目指す。

4. 研究成果

(1) absolute norm 空間 R^2 上の定数についての計算を行った。

2次元 Lorenz 空間上についての James 定数の計算は Kato-Maligranda の結果があるが、その論文の中に未解決問題として出されていた問題を解決することにより、James 定数を完全に決定した。

2次元 Lorenz 空間の共役空間のノルムの形が未解決問題であったが、解決することにより、2次元 Lorenz 空間の共役空間の James 定数について完全に決定した。

R^2 上の全ての absolute normalized norm 全体が凸集合になることから、その端点の形を凸解析学の手法を持ちえることにより、決定した。更に、その空間の von Neumann-Jordan 定数を決定した。

R^2 上の全ての absolute normalized norm 全体が凸集合の端点になるノルムに対して、James 定数の計算に成功した。

(2) 一般的なバナッハ空間についてその幾何学的構造について、調べた。

バナッハ空間の直和の概念を利用して、バナッハ空間に新しい幾何学的定数を定義し、その性質や特徴付けを行った。

バナッハ空間の直和の幾何学的構造として、特に、Uniform non- l^n -ness の概念について調べた。

(3) バナッハ空間上のノルム不等式について調べることにより、バナッハ空間の構造を調べた。

一般化された Clarkson 不等式についての Maligranda- Sabourova の結果について、別なアプローチで証明した。

sharp triangle inequality についての結果をバナッハ空間上の mean の考え方により、一般化に成功した。

Mitani-Saito-Kato-Tamura の sharp triangle inequality の結果に付いての別証明を与えると共に、等号条件について詳細に調べた。

S. Saitoh の三角不等式についての考え方を基にして、Moslehian 等の q-norm の概念を $-norm$ の概念に拡張することにより、三角不等式の別な観点から考察を行った。

(4) バナッハ空間のノルム不等式を作用素論の世界への拡張を行った。

Dunkl-Williams 不等式の作用素不等式版として、Pecaric-Radic の結果を一般化に成功し、その不等式の等号条件を求めた。

Schatten p-class operator からなる空間 c_p 上で拡張された中線定理を考察し、その応用を考察した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 52 件)

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito, Ken-ichi Mitani, Extremal structure of the set of absolute normalized norms on R^2

and the James constant, Applied Math. Computation, 掲載決定, 査読有.

Mohammad S. Moslehiam, Masaru Tominaga, Kichi-Suke Saito, Schatten p -norm inequalities related to an extended operator parallelogram law, Linear Algebras and Applications, Vol. 455, 2011, pp.823-829, 査読有.

Masatoshi Fujii, Mikio Kato, Kichi-Suke Saito, Takayuki Tamura, Sharp mean triangle inequality, Math. Inequal. Appl., Vol.13,2010, pp.743-752, 査読有.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito, Ken-ichi Mitani, Extremal structure of the set of absolute normalized norms on \mathbb{R}^2 and the von Neumann-Jordan constant, J. Math. Anal. Appl., Vol.370, 2010, pp.101-106, 査読有.

Mikio Kato, Kichi-Suke Saito, Takayuki Tamura, Uniform non- I^n -ness of ℓ_p -direct sums of Banach spaces $X+Y$, J. Nonlinear Anal. Convex Anal., Vol. 11, No.1, 2010, pp.13-33, 査読有.

Kichi-Suke Saito, Masaru Tominaga, The Dunkl-Williams type inequality for absolute value operators, Linear Alg. Appl., Vol.432, 2010, pp.3258-3264, 査読有.

Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, Sharp triangle inequalities for Banach spaces II, J. Inequal. Appl., Vol. 2010,2010, Article ID 323609, pp17, 査読有.

Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, The new geometrical constant of Banach spaces and its applications, Commentationes Mathematicae, Vol.49, No.1,2009, pp.3-13, 査読有.

Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, Dual of two dimensional Lorentz sequence spaces, Nonlinear Analysis, Vol.71, 2009, pp.5238-5247, 査読有.

Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, Tomonari Suzuki, On the calculation of the James constant of Lorentz sequence spaces, J. Math. Anal. Appl., Vol.343, 2008, pp.310-314, 査読有.

[学会発表](計60件)

小室直人, 齋藤吉助, 三谷健一, On the James constant of absolute norms on \mathbb{R}^2 , 数理研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2011年2月14日.

三谷健一, 齋藤吉助, 小室直人, absolute norm の集合の端点構造について, 数理研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2010年10月27日.

Kichi-Suke Saito, The sharp triangle inequalities and its applications to the geometry of Banach spaces, CIA10, September 23, 2010, Hungary.

齋藤吉助, 三谷健一, 小室直人, Absolute norm の単調性とその応用, 数理研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2010年8月31日.

Kichi-Suke Saito, Refinements of sharp triangle inequalities in Banach spaces and its applications, Abstract Harmonic Analysis 2009, National Sun Yat-sen University Kaohsiung, Taiwan, December 18-22, 2009.

齋藤吉助, Dunkl-Williams 不等式と作用素不等式について, 作用素論・作用素環論研究集会, 奈良教育大学, 2009年11月19日.

Kichi-Suke Saito, On sharp triangle inequalities in Banach spaces and its applications, Banach and Function Spaces 2009, September 14-17, 2009, Kyushu Institute of Technology, Tobata Campus Kitakyushu, Japan.

Kichi-Suke Saito, Dual of two dimensional Lorentz spaces and the James constant, Analysis, Inequality and Homogeneity theory, Lulea, Sweden, June 8-11, 2009.

三谷健一, 齋藤吉助, Sharp triangle inequality の等号条件について, 数理研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2009年5月21日.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito, Ken-ichi Mitani, Extremal structure of absolute normalized norms on \mathbb{R}^2 II, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis March 27-31, 2009, Tokyo Institute of Technology.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito, Ken-ichi Mitani, Extremal structure of absolute

normalized norms on R^2 , Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, September 15, 2008, Shimane, Japan.

Kichi-Suke Saito, Refinements of triangle inequalities in Banach spaces, International Workshop on Interpolation Theory, Function Spaces and Related Topics, September 8, 2008, Toledo, Spain.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

齋藤 吉助 (SAITO KICHI-SUKE)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号： 30018949

(2)研究分担者

加藤 幹雄 (KATO MIKIO)
九州工業大学大学院・工学研究院・教授
研究者番号：50090551

羽鳥 理 (HATORI OSAMU)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：70156363

渡邊 恵一 (WATANABE KEIICHI)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号：50210894

(3)連携研究者(2008-2009)

高橋 泰嗣 (TAKAHASHI YASUJI)
岡山県立大学・情報理工学部・教授
研究者番号：30001853