様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　5 月 29 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008～2012
課題番号：２０５４０１６０

研究課題名（和文）マルチンゲール理論が描き出す Banach 関数空間の構造

研究課題名（英文）Structures of Banach function spaces that are derived from the theory of martingales

研究代表者
菊池　万里（KIKUCHI MASATO）
富山大学・大学院理工学研究部(理学)・教授
研究者番号：20204836

研究成果の概要（和文）：本研究の結果，マルチンゲールの理論を用いて Banach 関数空間の構造を解析することが可能であることを示す多くの定理を得ることができた。例えば，Banach 関数空間 X に於いて，ある種のマルチンゲール不等式が成り立つ為の必要十分条件が，X の再配列不変性や Boyd 指数を用いて表現できることを示した。この結果は，マルチンゲール不等式の成立と Banach 関数空間の構造との間に密接な関連があることを示している。

研究成果の概要（英文）：As a consequence of this research, we obtained a lot of theorems which show that we can analyze some structures of Banach function spaces by using martingale theory. For example we proved that, when X is a Banach function space, some necessary and sufficient conditions which ensure that certain kinds of martingale inequalities are valid in X can be expressed in terms of the rearrangement-invariance of X and the Boyd indices of X. This result shows that there are close connections between the validity of martingale inequalities and the structures of Banach function spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	700,000	210,000	910,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
２０１２年度	700,000	210,000	910,000
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：マルチンゲール，Banach 関数空間，再配列不変空間，Boyd 指数

１．研究開始当初の背景

マルチンゲール理論に於いて，再配列不変空間の概念を最初に導入したのは B. Johnson, G. Schetchman, A. Antipa, I. Novikov の四人の研究者である。彼らは，1988 年にそれぞれ独立に，再配列不変空間に於ける Doob 型，及び，Burkholder‐Davis‐Gundy 型の不等式が成立する為の必要十分条件を与えた。その後約十年間，マルチンゲール理論に於いてこの方面への大きな進展は見られなかった。十年後の 1998 年に，本研究代表者の菊池により，マルチンゲールの Hardy 空間上の有界線形汎関数の表現定理が示されたのをきっかけに，マルチンゲール理論に於いて，（再配列不変空間を特別な場合として含む）Banach 関数空間の概念が本格的に利用されるようになった。本研究を開始したのは，更にその十年後の 2008 年であり，この頃から

Banach 関数空間の構造とマルチンゲールの諸性質の密接な関連が徐々に認識され始めた。本研究を計画した動機は，Banach 関数空間の構造とマルチンゲール理論の更なる密接な関連を明らかにしたいと考えたことにある。マルチンゲール理論を専門としない研究者などにも興味を持って頂けるよう，本研究による成果を論文や口頭で発表した結果，この五年間でマルチンゲール理論と関数空間の関連の研究が増えてきている。

２．研究の目的

本研究課題の申請時の目的は，確率空間（Ω，Σ，P）上の確率変数が作るBanach関数空間の構造をマルチンゲール理論を用いて解析すること，また，Banach関数空間の理論のマルチンゲール理論への応用を模索することであった。その当時の具体的な目標は，次の通りである。尚，以下に於いて，$f=(f_n)$はマルチンゲールを表すものとし，Mf，及び，Sf はそれぞれ$f=(f_n)$の極大関数，及び，二次変分を表すものとする。

(1) Burkholder‐Davis‐Gundy 型の不等式

$$\|Sf\|_X \leqq C\|Mf\|_X$$

が成り立つための必要十分条件を求める。尚，Sf と Mf を入れ換えた不等式が成り立つ為の必要十分条件は既に得られている。

(2) $\Phi(t)$を区間$[0,\infty)$上の非負単調増加凸関数とし，X を再配列不変空間，Y を Banach 関数空間とする。不等式

$$\|\Phi(Mf)\|_X \leqq C\|\Phi(Sf)\|_Y$$

が成り立つ為に Y が満たすべき必要十分条件を求める。但し，十分条件は既に得られている。

(3) 変動指数$p(\cdot)$に関するLebesgue空間$L_{p(.)}$は，再配列不変性を持たないBanach関数空間である。この空間のノルムに関する種々のマルチンゲール不等式が成り立つ為に，$p(\cdot)$が満たすべき条件を求める.

(4) $L_{p(.)}$を変動指数$p(\cdot)$に関するLebesgue空間とし，$H_{p(.)}$を$Mf\in L_{p(.)}$となるマルチンゲールfの全体とすれば，$H_{p(.)}$はBanach空間になる。この空間の双対空間の表現定理を確立する。また，$Sf\in L_{p(.)}$であるようなマルチンゲールfの全体が作る空間$K_{p(.)}$の双対空間の表現定理も確立する。

３．研究の方法

研究開始当初から，研究目的欄に記した(1)の不等式が成り立つ為の必要十分条件は，「X が再配列不変となるように同値的にノルム付け可能であり，その下Boyd指数α_Xが 0 にならない」ことであると予想された。この予想を証明する為には，(1)の不等式

$$\|Sf\|_X \leqq C\|Mf\|_X$$

が成り立つと仮定して，「Xが再配列不変となるように同値的にノルム付け可能である」ことを証明することがその本質となる（Ωが Lebesgue 測度を確率測度とする区間[0,1]である場合には，(1)の不等式が成り立つ再配列不変空間Xの下Boyd指数α_Xが 0 にならないことは既に知られている）。これを実現する為に，数学の研究を進める上で一般的に用いられる方法として，他の研究者（本研究の場合，実解析学，調和解析学，関数解析学，確率論等の研究者）と討論や情報交換を行ったり，過去の文献で採用された手法を模索したりすることで研究を進めた。尚，本研究の内容に精通した研究者は少数であることから，他の研究者との共同研究は行わず，研究代表者（菊池）が一人で研究を進めることとした。

研究目的欄の(2)の問題は，本研究開始当初からかなり難しい問題であることが予想された。その為，(2)の不等式に於いて Y を X に置き換えた不等式,

$$\|\Phi(Mf)\|_X \leqq C\|\Phi(Sf)\|_X$$

或いは，Sfをfの概収束極限f_∞の絶対値に置き換えた不等式

$$\|\Phi(Mf)\|_X \leqq C\|\Phi(|f_\infty|)\|_X$$

が成立する為の必要十分条件を求めることから始め，徐々に目的の不等式

$$\|\Phi(Mf)\|_X \leqq C\|\Phi(Sf)\|_Y$$

が成り立つ為の必要十分条件に近づける方法を採用することとした。この研究項目についても，他の研究者と討論や情報交換をしたり，過去の文献の方法を調査したりすることで研究を進めた。

研究目的欄の(3)の問題に関しては，実解析学，調和解析学に於ける研究結果と比較しながら研究を進めることが基本になる。変動指数のLebesgue空間$L_{p(.)}$は，実解析学，調和解析学に於いては近年盛んに研究されているが，確率論的な視点からの研究は今日でも少ない。その根本的な理由は，一般の確率空間には，位相構造が与えられていないことにある。このことから本研究では，Lebesgue 測度を確率測度とする区間[0,1]のように，取り扱いやすい位相構造を持つ確率空間上でのマルチンゲール不等式を研究する方法を採用することとした。先ずは，$L_{p(.)}$に於けるDoobの弱型不等式を考察したが，思うように研究が進まなかった為，より一般的なBanach関数空間に於ける弱型不等式が成り立つ為の必要十分条件を求め，その結果を応用する形で$L_{p(.)}$に於ける弱型不等式の成り立つ条件を求めることを目指した(しかしながら，まだ完全な問題解決には至っていない)。

上記のように，研究目的欄の(3)の研究は、より一般的な Banach 関数空間に於ける弱型不等式の研究に変更して考察した為，研究目的欄の(4)の問題に関しても，別の研究に変更した（研究成果の欄を参照)。よって(4)の問題の研究方法には言及しない。

４．研究成果

本研究によって得られた成果は，2012 年度の研究成果を除き，すべて論文として纏め，既に掲載済み，若しくは今後掲載される予定である（尚，2012 年度に得られた成果は，現時点でまだ投稿中であり，掲載が決定していない）。これに鑑み，以下に各論文の内容を記すことで，研究成果の報告とする。

下記雑誌論文欄の①の内容：
XをBanach関数空間とする。雑誌論文欄の②の論文で，$\|Sf\|_X \leqq \|Sg\|_X$なる関係がある二つのマルチンゲール$f=(f_n)$，$g=(g_n)$に対して，不等式

$$\|f_\infty\|_X \leqq C\|g_\infty\|_X$$

が成り立つようなXの特徴付けを与えた。ここに，Sfはfの二次変分を表し，f_∞，g_∞は，それぞれf，gの概収束極限を表す。この結果に動機付けられ，雑誌論文欄の①の論文では，$\|Mf\|_X \leqq \|Mg\|_X$なる関係がある二つのマルチンゲール$f=(f_n)$，$g=(g_n)$に対して，不等式

$$\|f_\infty\|_X \leqq C\|g_\infty\|_X$$

が成り立つようなXの特徴付けを与えた。そのようなXは，逆に$\|f_\infty\|_X \leqq C\|g_\infty\|_X$なる関係があるf=$(f_n)$，$g=(g_n)$に対して，不等式

$$\|Mf\|_X \leqq C\|Mg\|_X$$

が成り立つようなBanach関数空間として特徴付けられることも示した。ここに，Mfはfの極大関数を表す。このような空間Xは，再配列不変性の条件と上Boyd指数β_Xに関する条件を用いて表現することができる。更に，既に知られている結果によれば，そのようなXは，Doob型の不等式が成り立つ空間として特徴付けることもできる。

下記雑誌論文欄の②の内容：
マルチンゲール$f=(f_n)$と可予測過程$v=(v_n)$に対し，fのvによるマルチンゲール変換をv*fで表すことにする。$|v_n|\leqq 1$ (n=1,2,…)であるとき，不等式

$$\|M(v*f)\|_X \leqq C\|Mf\|_X$$

が成り立つようなBanach関数空間Xの特徴付け，及び，$|v_n|\leqq 1$ (n=1,2,…)であるとき，不等式

$$\|f_\infty\|_X \leqq C\|g_\infty\|_X$$

が成り立つようなBanach関数空間Xの特徴付けを与えた。前者の条件を満たす空間Xは，$\|Sf\|_X \leqq \|Sg\|_X$なる関係がある二つのマルチンゲール$f=(f_n)$，$g=(g_n)$に対して，不等式

$$\|Mf\|_X \leqq C\|Mg\|_X$$

が成り立つような空間として特徴付けることができ，また，後者の条件を満たす空間Xは，$\|Sf\|_X \leqq \|Sg\|_X$なる関係がある二つのマルチンゲール$f=(f_n)$，$g=(g_n)$に対して，不等式

$$\|f_\infty\|_X \leqq C\|g_\infty\|_X$$

が成り立つような空間として特徴付けることもできる。前者及び後者の条件を満たすBanach関数空間Xの特徴付けは，いずれも再配列不変性の条件，及び，上下Boyd指数α_X，β_Xを用いて表現することができる。

下記雑誌論文欄の③の内容：
XをBanach関数空間とし，xを確率変数とする。集合$\{\omega\in\Omega : x(\omega)>\lambda\}$の指示関数のXに於けるノルムにλを乗じた値を考える。すべての正数λに関するこのような値の上限を$\|x\|_{w\text{-}X}$と書く。$\|x\|_{w\text{-}X}$が有限であるような確率変数xの全体をw-Xで表すことにすれば，w-Xは準Banach空間になる。これをXの弱空間と呼ぶ。

完全加法族$\mathcal{A}$に関する条件付平均作用素$E[\cdot|\mathcal{A}]$の全体が，Xからw-Xへの一様有界な線形作用素の族となるための必要十分条件を与えた。そのような必要十分条件の一つは，X，及び，そのassociate spaceの上基本関数を用いて表現される。但し，Xの上基本関数$\phi^u_X(t)$は，P(A)=tであるような集合Aの指示関数のXに於けるノルムを考え，Aが変化するときのそのようなノルムの上限として定義される[0,1]上の関数である。

$E[\cdot|\mathcal{A}]$の全体が，X から w-X への一様有界な線形作用素の族となるための必要十分条件は，X に於ける Doob の弱型不等式

$$\|Mf\|_{w\text{-}X} \leqq C\|f_\infty\|_X$$

が成り立つ為の必要十分条件であることを示すこともできた。かくて，上記の不等式が成り立つような Banach 関数空間 X の特徴付けが得られた。

下記雑誌論文欄の④の内容：
④の論文の主定理は，Banach関数空間Xに付随するマルチンゲールの二つのBanach空間$K^*(X)$と$K_*(X)$が等しい空間になるための必要十分条件（そのようなXの特徴付け）に関する結果である。ここに，$K^*(X)$は平均振動の上限

$$\theta f = \sup_n E[|f_\infty - f_{n-1}||F_n]$$

がXに属するような一様可積分マルチンゲール$f=(f_n)$の全体として定義され，$K_*(X)$は

$$E[|f_\infty - f_{n-1}||F_n] \leqq E[\gamma|F_n]$$

がすべてのnに対して成り立つようなXに属するγが存在する一様可積分マルチンゲール$f=(f_n)$の全体として定義される。$X=L_p$の場合など，多くの空間Xに対して$K^*(X)=K_*(X)$となることが知られており，これらの空間が等しくならない場合があることを意識する研究者は多くないと思われる。この論文の結果として，$K^*(X)=K_*(X)$が成り立たない空間Xも多く存在するという予想外の結果を得ることができた。

下記雑誌論文欄の⑤の内容：
マルチンゲール$f=(f_n)$の平均振動の上限

$\theta f= \sup_n E[|f_\infty - f_{n-1}||F_n]$
と f の極大関数 Mf に関する不等式
$$\|\theta f\|_X \leqq C\|Mf\|_X$$
が成り立つようなBanach関数空間の特徴付けを与えた。そのような必要十分条件の一つは，Xの再配列不変性の条件と，Xの上下Boyd指数α_X, β_Xを用いて表現される。

下記雑誌論文欄の⑥の内容：
$\Phi(t)$を$\Phi(0)=0$ であるような区間$[0,\infty)$上の狭義単調増加凸関数とし，条件
・$\Phi(t)/t \to 0$ $(t\to 0+)$
・$\Phi(t)/t \to \infty$ $(t\to\infty)$
を満たすものとする。このような関数$\Phi(t)$はN - 関数と呼ばれる。
$\Phi(t)$をN - 関数とするとき，マルチンゲール$f=(f_n)$に対して，不等式
$$\|\Phi(Mf)\|_X \leqq C\|\Phi(|f_\infty|)\|_X$$
が成り立つようなBanach関数空間Xの特徴付けを，様々な付随条件の下に考察した。例えば，ΦがΔ_2 - 条件，∇_2 - 条件の双方を満たす場合，上記の不等式が成り立つ為の必要十分条件は，「Xが再配列不変空間となるように同値的にノルム付け可能であること」である。ここに，ΦがΔ_2 - 条件を満たすとは，不等式
$$\Phi(2t) \leqq k\Phi(t), \quad t\in[a,\infty)$$
が成り立つような定数$a\geqq 0$，及び，$k>0$ が存在することであり，Φが∇_2 - 条件を満たすとは，不等式
$$2L\Phi(t) \leqq \Phi(Lt), \quad t\in[a,\infty)$$
が成り立つような定数 $a\geqq 0$，及び，$L>0$ が存在することである。

下記雑誌論文欄の⑦の内容：
この論文は，研究代表者(菊池)が平成 17 年から平成 19 年までの三年間に受けた科研費(課題番号 7540152)による研究成果と，本研究課題による研究成果を併せて一つの論文に纏めたものである。
Φを区間$[0,\infty)$上の非負単調増加凸関数とし，$f=(f_n)$をマルチンゲールとする。このとき，Φとfの絶対値の合成
$$\Phi(|f|)=(\Phi(|f_n|))$$
は，各$\Phi(|f_n|)$が積分可能である限り，劣マルチンゲールになる。従って，$\Phi(|f|)$はマルチンゲール$g=(g_n)$と可予測増加過程$h=(h_n)$の和に一意に分解される．これを$\Phi(|f|)$のDoob分解と呼ぶ。$\Phi(|f_n|)=g_n+h_n$をそのような分解とするとき，$\Phi(|f|)$とg，hの間に，様々なノルム不等式が成り立つことが知られている。それら既知の不等式と同様の不等式が，Banach関数空間Xに於いても成立する為の必要十分条件を与えた。更に，Banach関数空間Xに於けるBurkholder-Davis-Gundy型の不等式を一般化する新たな不等式を確立することもできた。

上記の研究成果に加え，2012 年度の研究成果として，$\|Sf\|_X \leqq C\|Sg\|_X$なる関係がある二つのマルチンゲール$f=(f_n)$，$g=(g_n)$に対して，不等式
$$\|Mf\|_X \leqq C\|Mg\|_X$$
が成り立つような Banach 関数空間 X の特徴付けを与えた。この結果を纏めた論文を現在投稿中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）
① Masato Kikuchi，A relation between two kinds of norms for martingales, Mathematica Slovaca（掲載決定済み），査読有.
② Masato Kikuchi，On some inequalities for martingale transforms in Banach function spaces， Acta Scientiarum Mathematicarum(掲載決定済み)，査読有.
③ Masato Kikuchi，Uniform boundedness of conditional expectation operators on a Banach function space，Mathematical Inequalities & Applications，16 巻，No.2，2013，pp.483－499，査読有.
④ Masato Kikuchi，On some Banach spaces of martingales associated with function spaces，Forum Mathematicum，24 巻，No.4，2012，pp.769－789，査読有.
⑤ Masato Kikuchi，Yasuhiro Kinoshita，On certain martingale inequalities for maximal functions and mean oscilla - tions，Mathematica Scandinavica，109 巻，No.2，2011，pp.309－319，査読有.
⑥ Masato Kikuchi，On Doob type ine - qualities in Banach function spaces，Banach and function spaces Ⅲ，2011，pp.253－269，査読有.
⑦ Masato Kikuchi，On some inequalities for Doob decompositions in Banach function spaces ， Mathematische Zeitschrift，265 巻，No.4，2010，pp.865－887，査読有.

〔学会発表〕（計 5 件）
① 菊池万里，On some inequalities for martingale transforms in Banach function spaces，研究集会 富山解析セミナー2012，2012 年 10 月 6 日，富山大学理学部.
② 菊池万里，Banach関数空間におけるマルチンゲール変換のためのノルム不等式，実解析学シンポジウム 2011，2011 年 11

月 4 日，信州大学工学部.

③ <u>菊池万里</u>，Uniform boundedness of conditional expectations in some function spaces，実解析学シンポジウム 2010，2010 年 11 月 13 日，九州工業大学工学部.

④ <u>Masato Kikuchi</u>，Extension of the Burkholder-Davis-Gundy inequality in rearrangement-invariant function spaces and its application，International Symposium on Banach and Function Spaces 2009，2009 年 9 月 14 日，九州工業大学工学部.

⑤ <u>菊池万里</u>，マルチンゲール理論が描き出すBanach関数空間の構造，日本数学会年会（特別講演），2009 年 3 月 27 日，東京大学（駒場キャンパス）.

６．研究組織

(1)研究代表者

菊池　万里（KIKICHI MASATO）
富山大学・大学院理工学研究部（理学）・教授
研究者番号：20204836

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

和泉澤　正隆（IZUMISAWA MASATAKA）
東海大学・理学部・教授
研究者番号：50108445