

自己評価報告書

平成23年3月31日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540167

研究課題名(和文) 変動する指標をもつ関数空間

研究課題名(英文) Function spaces with variable exponents

研究代表者

中井英一 (NAKAI EIICHI)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：60259900

研究分野：実解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：実解析、調和解析、フーリエ解析

1. 研究計画の概要

現在までに理論が整備されてきた関数空間の多くは、Lebesgue 空間や Lipschitz 空間のように、関数 $f(x)$ の定義される位置 x に関して一様に、可積分性や連続性が保証された空間である。これに対し、近年、「変動指数をもつ Lebesgue 空間」が電気流動学との関連で注目されている。本研究では、この「変動指数をもつ Lebesgue 空間」だけでなく、「変動指数をもつ Lipschitz 空間」や「変動指数をもつ Hardy 空間」およびこれらを一般化した関数空間の様々な性質を調べ、「変動する指標をもつ関数空間」の理論を構築する。

具体的には、「変動指数をもつ Lipschitz 空間」や「変動指数をもつ Hardy 空間」の適切な定義を定め、これらの関数空間が有益な性質を持つための、変動指数が持つべき条件を決定する。また、重み付き空間との関連を明らかにする。さらに、上記の関数空間と一般化 Morrey-Campanato 空間およびその前双対空間等を統一的に扱う手法を開発し、これら関数空間の相互関係を決定する。

2. 研究の進捗状況

(1) Hardy 空間については、これまで多くの研究により、様々な性質や同値な定義が知られている。これらの性質をそのまま保った形で、「変動指数をもつ Hardy 空間」の理論を構築することに成功した。例えば、指数が 1 より大きい場合には、我々の定義した「変動指数をもつ Hardy 空間」は「変動指数をもつ Lebesgue 空間」と一致する。また、指数が 0 と 1 の間のときは、「変動指数をもつ Hardy 空間」の双対空間は「変動指数をもつ高次の Campanato 空間」と同一視できる。これは

「変動指数を持つアトム」を用いて証明される。我々の用いた変動指数の条件は、「変動指数をもつ Lebesgue 空間」に関する先行研究と比較しても大変自然なものである。(投稿中の結果も含む)

(2) Hardy 空間の双対空間は、指数が 0 と 1 の間の場合、Lipschitz 空間と同一視できることが知られているが、「変動指数をもつ高次の Campanato 空間」は、この、Lipschitz 空間の一般化である。この「変動指数をもつ高次の Campanato 空間」についても理論を整備することができた。(投稿中の結果も含む)

(3) Lebesgue 空間の一般化である Orlicz 空間、Morrey 空間に対応して、「変動指数をもつ Orlicz 空間」、「変動指数をもつ Morrey 空間」の性質を詳しく調べ、Hardy の不等式、Riesz potential に関する Sobolev の埋め込み性質等を証明した。さらに「変動指数をもつ Orlicz-Morrey 空間」をも定義してその性質の研究を進めている。

(4) その他、関数を定義する土台となる距離空間の基本的だが知られていなかった性質を見つけ出し、また有界平均振動関数と下方有界平均振動関数との違いを明らかにした。測度と擬距離をもつ Homogeneous 型空間において、通常 Campanato 空間と下方有界平均振動量を持つ Campanato 空間を比較するとともに、Lusin-area 作用素と Littlewood-Paley 作用素の、通常 Campanato 空間から下方有界平均振動量を持つ Campanato 空間への有界性を得た。測度空間上の Orlicz 空間に関して、各点的マル

チプレイヤーの特徴付けを行った。
Morrey-Campanato ノルムを伴う中心平均空間を定義し、そこでの分数べき積分作用素等の有界性を証明した。重み付きの場合についても研究を進めている。

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

(理由)

この3年間の研究成果は、すでに25編の論文(掲載予定を含む)および海外での招待講演等において発表した。特に、「変動指数をもつ Lipschitz 空間」や「変動指数をもつ Hardy 空間」の適切な定義については、研究協力者の澤野の協力により発見することができ、ほぼその全体像が明らかになった(現在投稿中)。

4. 今後の研究の推進方策

変動する指標をもつ関数空間に関連する関数空間や重み付き関数空間等について調査を進めるとともに、さらなる今後の研究につながるような形で、研究全体のとりまとめを行う。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計25件)

- ① 水田義弘、中井英一、大野貴雄、下村哲、Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in \mathbb{R}^n , Revista Matematica Complutense, 掲載予定
- ② 水田義弘、中井英一、大野貴雄、下村哲、Hardy's inequality in Orlicz-Sobolev spaces of variable exponent, Hokkaido Mathematical Journal, 掲載予定
- ③ 水田義弘、中井英一、大野貴雄、下村哲、Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey spaces of variable exponent, Complex Variables and Elliptic Equations, 掲載予定
- ④ 水田義弘、中井英一、大野貴雄、下村哲、Boundedness of fractional integral operators on Morrey spaces and Sobolev embeddings for generalized Riesz potentials, Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 62, 2010, 707--744.
- ⑤ 中井英一、Singular and fractional integral operators on Campanato spaces with variable growth conditions, Revista Matematica Complutense, Vol. 23, 2010, 355--381.

[学会発表] (計32件)

- ① 澤野嘉宏、中井英一、Hardy spaces with variable exponents, 日本数学会年会、2011年3月20日、早稲田大学理工学術院
- ② 水田義弘、中井英一、大野貴雄、下村哲、Hardy's inequality in Orlicz-Sobolev spaces of variable exponent, 日本数学会秋季総合分科会、2010年9月22日、名古屋大学
- ③ 中井英一、Singular and fractional integral operators on generalized Campanato spaces, 実解析学シンポジウム2009, 2009年10月24日、城西大学
- ④ 中井英一、Campanato spaces with variable growth conditions, Symposium on function spaces and their applications, 2009年8月24日、Beijing Normal University (北京師範大学)
- ⑤ 中井英一、Singular and fractional integral operators on predual of Campanato spaces, 日本数学会年会、2009年3月26日、東京大学駒場キャンパス

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]