

機関番号：34314

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540176

研究課題名 (和文) 作用素論と量子情報理論における不等式の研究

研究課題名 (英文) A study of inequalities in operator theory and quantum information theory

研究代表者

栗山 憲 (KURIYAMA KEN)

佛教大学・教育学部・特別任用教授

研究者番号：10116717

研究成果の概要 (和文)：量子力学の基礎に関連して、ヒルベルト空間上の作用素に関する数学的および情報理論的な研究を行った。特に、不確定性関係を表わす作用素のトレース不等式を証明した。

研究成果の概要 (英文)：Mathematical and information theoretical studies of operators in Hilbert spaces are achieved related to the foundation of quantum mechanics. Especially, trace inequalities of operators which mean uncertainty relations are proved.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 2008 年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 2009 年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2010 年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,100,000 | 930,000 | 4,030,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：作用素, 量子情報, 不等式, 不確定性関係, ヒルベルト空間

1. 研究開始当初の背景

量子力学の基礎付けとその科学・工学への応用は、量子力学の誕生以来、多くの研究がなされてきた。たとえば von Neumann によるヒルベルト空間とその上の作用素・作用素代数論, von Neumann entropy の導入など、数学と情報理論における研究などがあげられる。

1994 年には Shor により、(量子計算機による) 素因数分解のアルゴリズムが開発され、その開発を契機として数学・情報科学・物理

学において非可換性 (量子) を軸として融合的な研究が活発に行われてきた。

また、統計物理の分野では Tsallis により Tsallis entropy が導入され興味ある成果があげられてきた。

本研究においては、Tsallis entropy など新たな視点により、数学 (関数解析学) をベースにして情報科学との融合的な研究を行うことが動機であり、具体的な背景・動機は下記の通りである。

(1) ヒルベルト空間上の作用素に関する不等式 (作用素不等式) について、Furuta の

不等式など多くの研究がなされていた。Furuta は Shannon 型および逆型の作用素不等式を証明していた。研究代表者たちは、Tsallis relative operator entropy を導入し、Shannon 型の不等式を証明していた。

(2) Shannon の情報理論にたいして、von Neumann や Umegaki, Araki らにより量子情報理論 (非可換情報理論) の研究がなされてきた。研究代表者たちは、Tsallis relative entropy の概念を導入し、研究してきた。

(3) 量子力学の観測問題に関連して、不確定性関係に関連する不等式の研究が、量子力学の誕生時に Heisenberg, Schrodinger によって行われてきた。その後、Wigner-Yanase により skew information が導入され一連の不等式が証明された。さらに Luo などにより skew information を用いて Heisenberg 型の不等式の精密化・一般化がなされてきた。

研究代表者たちは、generalized skew information を導入し不確定性関係に対応する不等式を証明し、また $*$ -algebra 上の正值線形汎関数に付随する観測に関する不確定性関係の不等式を証明していた。

(4) Shor による量子計算機による素因数分解のアルゴリズムが開発されていたが、その重要性は計算量の評価によっていた。研究代表者たちは、その評価の精密化の研究を行っていた。

2. 研究の目的

(1) Shannon 型の作用素不等式や、トレイス不等式などの量子情報理論への拡張。1990 年代に量子統計力学の分野で登場した Tsallis エントロピーのアイデアを用いて、量子情報理論と関連させてパラメータ化された作用素不等式を発展させる。

(2) 量子力学の観測に関連する不等式の証明。

Wigner-Yanase と Wigner-Yanase-Dyson

により導入された skew information を用いて、Luo などにより示された Heisenberg 型の不等式のさらなる一般化・精密化を目指す。

3. 研究の方法

(1) Shannon 型の作用素不等式や、トレイス不等式などの量子情報理論への拡張。

Furuta などにより展開された手法を用いて、Tsallis entropy と関連させながら拡張する。

(2) 量子力学の観測に関連する不等式の証明。

不確定性関係と関連させながら、作用素論的な視点により一連のトレイス不等式を証明する。また、作用素代数的な視点からする不等式の研究を行う。

4. 研究成果

(1) ヒルベルト空間上のある種の作用素に対して下記のトレイス不等式を証明した。

① 2 次の正定値行列 T, A と $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ を満たす正の数の組 $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ に対して、次のトレイス不等式が成り立つことを示した。

$$\text{Tr}[(T^{\sqrt[m]{p_1}} A)^m] \leq \text{Tr}[T^{p_1} A \cdots T^{p_m} A] \leq \text{Tr}[TA^m]$$

この不等式は、作用素の積については非可換性があるため一般には大小関係が成り立たないが、トレイスの形にすると大小関係が生じしかも一か所に集めた方がトレイスは大きくなることを意味している。

② 上の不等式は 3 次以上になると、実数にすらならない例をあげることににより、成立しないことを示した。

③ 3 次以上の場合については、上の不等式を修正した以下の不等式について予想した。

$$\text{Tr}[(T^{\sqrt[m]{p_1}} A)^m] \leq \text{Re}\{\text{Tr}[T^{p_1} A \cdots T^{p_m} A]\}$$

$$|Tr[T^{p_1} A \cdots T^{p_m} A]| \leq Tr[TA^m]$$

(2) Wigner-Yanase-Dyson skew information を拡張し, 不確定性関係に関連するトレイス不等式を証明した.

① 密度作用素 (トレイスが1の正定値作用素) ρ , エルミート作用素 H とするとき, Wigner-Yanase は skew information

$I_\rho(H)$ を

$$\begin{aligned} I_\rho(H) &= \frac{1}{2} Tr \left[(i[\rho^{1/2}, H])^2 \right] \\ &= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H] \end{aligned}$$

とおいた. さらに, Dyson は

$0 \leq \alpha \leq 1$ としたとき, 一般化して,

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha}(H) &= \frac{1}{2} Tr \left[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H]) \right] \\ &= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^\alpha H \rho^{1-\alpha} H] \end{aligned}$$

とおいた.

② 本研究では, Wigner-Yanase-Dyson skew information を拡張して,

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha}(H) &= \frac{1}{2} Tr \left[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0]) \right] \\ &= Tr[\rho H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\rho,\alpha}(H) &= \frac{1}{2} Tr \left[\left\{ \rho^\alpha, H_0 \right\} \left\{ \rho^{1-\alpha}, H_0 \right\} \right] \\ &= Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] \end{aligned}$$

$$K_{\rho,\alpha}(H) = \frac{1}{2} Tr \left[\left(i \left[\frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2}, H_0 \right] \right)^2 \right]$$

$$L_{\rho,\alpha}(H) = \frac{1}{2} Tr \left[\left(i \left\{ \frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2}, H_0 \right\} \right)^2 \right]$$

とおいた. ただし,

$$H_0 = H - Tr[\rho H] I,$$

$$[X, Y] = XY - YX, \{X, Y\} = XY + YX$$

である.

③ 以下のトレイス不等式を示した.

$$W_{\rho,\alpha}(X) W_{\rho,\alpha}(Y) \geq \frac{1}{4} \left| Tr \left[\left(\frac{\rho^\alpha + \rho^{1-\alpha}}{2} \right)^2 [X, Y] \right] \right|^2$$

$$U_{\rho,\alpha}(X) U_{\rho,\alpha}(Y) \geq \alpha(1-\alpha) |Tr[\rho[X, Y]]|^2$$

ただし,

$$W_{\rho,\alpha}(X) = \sqrt{K_{\rho,\alpha}(X) L_{\rho,\alpha}(X)}$$

$$U_{\rho,\alpha}(X) = \sqrt{I_{\rho,\alpha}(X) J_{\rho,\alpha}(X)}$$

である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

① Kenjiro Yanagi, Metric adjusted skew information and uncertainty relation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 380, 2011, pp. 888-892, 査読有

② Kenjiro Yanagi, Uncertainty relation on generalized Wigner-Yanase-Dyson skew Information, Linear Algebra and its Applications, Vol. 433, 2010, pp. 1524-1532, 査読有

③ Kenjiro Yanagi, Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 365, 2010, pp. 12-18, 査読有

④ Shigeru Furuichi, Ken Kuriyama and Kenjiro Yanagi, Trace inequalities for products of matrices, Linear Algebra and its Applications, Vol. 430, 2009, pp. 2271-2276, 査読有

⑤ Shigeru Furuichi, Kenjiro Yanagi and Ken Kuriyama, Trace inequalities on a Generalized Wigner-Yanase skew Information, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 356, 2009, pp. 179-185, 査読有

⑥ Kenjiro Yanagi and Noriyuki Yamashita, On an inequality of capacity of MA(1) Gaussian channel with feedback, Applied Mathematics and Information Sciences, Vol. 3, 2009, pp. 13-23, 査読有

- ⑦ Mamoru Kutami, Regular rings satisfying generalized almost comparability, Communications in Algebra, Vol. 37 (5), 2009, pp. 1579-1593, 査読有
- ⑧ Yoshimasa Matsuno, Periodic solutions of a resistive model for nonlocal Josephson dynamics, Journal of Physics A: Math. Theor. Vol. 42, 2009, 025401 (7pp), 査読有
- ⑨ Takuya Kitamoto, Extension of the Algorithm to compute H^∞ norm of a parametric system, 電子情報通信学会論文誌, E92-A-8, 2009, pp. 2036-2045, 査読有
- ⑩ Yoshimasa Matuno, Periodic solutions of the short pulse model equation, Journal of Mathematical Physics, Vol. 49, 2008, 073508 (1-18), 査読有
- ⑪ Takuya Kitamoto, On computation of a power series root with arbitrary degree of convergence, 日本応用数理学会英文誌, Vol. 25, 2008, pp. 255-279, 査読有
- ⑫ Takuya Kitamoto and Tetsu Yamaguchi, The optimal H^∞ norm of a parametric system Achievable using output feedback controller, 電子情報通信学会論文誌, E91-A-7, 2008, pp. 1713-1724, 査読有
- ⑬ Takuya Kitamoto and Tetsu Yamaguchi, On the check of accuracy of the Coefficients of formal power series, 電子情報通信学会論文誌, E91-A-8, 2008, pp. 2101-2110, 査読有
- ⑭ Makio Ishihara, Ken Kuriyama and Minoru Tanaka, A cubic systolic array and its properties, International Journal of Computers and Applications, Vol. 30, 2008, pp. 173-182, 査読有

[学会発表] (計 32 件)

- ① 柳研二郎, 田中義晃, Wigner-Yanae-Dyson Skew information の一般化と関連する trace 不等式について, 京都大学数理解析研究所・研究集会「独立性と従属性の数理」, 2010年12月20日, 京都大学
- ② 柳研二郎, 一般化された skew information に関する不等式について II, 第 33 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA 2010), 2010年12月1日, 信州松代ロイヤルホテル (長野市)
- ③ Kenjiro Yanagi, Generalized Wigner-Yanase -Dyson skew information And uncertainty relation, International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA 2010),

2010年10月20日, Evergreen Laurel Hotel (Taichung, Taiwan)

- ④ 柳研二郎, 一般化Wigner-Yanase-Dyson skew information と不確定性関係, 日本数学会函数解析分科会, 2010年9月23日, 名古屋大学
- ⑤ Kenjiro Yanagi, Trace inequality on generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information, The Second Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimazion, 2010年9月11日, Royal Paradise Hotel (Pucket, Thailand)
- ⑥ 山本正幸, 栗山憲, 中村正弘, 松山健, 非線形性を有する空調用熱源プラントの最適運転制御に関する研究 (空気調和衛生工学会・学会賞記念講演), 2010年9月1日, 空気調和衛生工学会, 山口大学
- ⑦ 柳研二郎, Wigner-Yanase-Dyson skew information と不確定性関係, 日本数学会函数解析分科会, 2010年3月24日, 慶応大学
- ⑧ 柳研二郎, 一般化された skew Information に関する不等式について, 第 32 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2009), 2009年12月2日, 湯田温泉ホテルかめ福 (山口市)
- ⑨ Shigeru Furuichi, Kenjiro Yanagi and Ken Kuriyama, skew information, uncertainty relations and trace inequalities, The Fifth International Conference on Information (Information 2009), 2009年11月7日, 京都大学
- ⑩ Shigeru Furuichi, Ken Kuriyama and Kenjiro Yanagi, Remarks on trace inequalities for products of matrices, The Sixth International Conference on Nonlinea Analysis and Convex Analysis (NACA2009), 2009年3月29日, 東京工大
- ⑪ 柳研二郎, 山下範幸, 情報理論に現れるある不等式について, 日本数学会実関数論分科会, 2009年3月27日, 東京大学
- ⑫ Kenjiro Yanagi, Shigeru Furuichi and Ken Kuriyama, Generalized Wigner-Yanase skew information and generalized Fisher information, 2008 International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA2008), 2008年12月8日, The Langham Hotel (Auckland, New Zealand)
- ⑬ 古市茂, 柳研二郎, 栗山憲, Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不等式 III, 日本数学会函数解析分科会, 2008年9月24日, 東京工大
- ⑭ Chenglun Liu, Ken Kuriyama and Yoshiaki Mizuta, Development of three

dimensional

FSM-DDM system with rock hole and rock bolt line element, 12th Japan Symposium on Rock Mechanics: ISRM2008 & 2009 West Japan Symposium on Rock Engineering, 2008年9月15日, Yamaguchi University

- ⑮ Shigeru Furuichi, Kenjiro Yanagi and Ken Kuriyama, Matrix inequalities on a Generalized Wigner-Yanase skew Information, International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA2008), 2008年6月22日, The College of William and Mary (Williamsburg, USA)
- ⑯ Shigeru Furuichi, Kenjiro Yanagi and Ken Kuriyama, On trace inequalities for products of matrices, 15th Conference of The International Linear Algebra Society (ILAS2008), 2008年6月16日, Cancun (Mexico)
- ⑰ 柳研二郎, 古市茂, 栗山憲, 一般化された skew information に関連した不確定性関係, 京都大学数理解析研究所・研究集会「バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用」, 2008年6月5日, 京都大学

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

栗山 憲 (KURIYAMA KEN)
佛教大学・教育学部・特別任用教授
研究者番号: 10116717

(2) 研究分担者

柳 研二郎 (YANAGI KENJIRO)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 90108267
松野 好雅 (MATSUNO YOSHIMASA)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 30190490
久田見 守 (KUTAMI MAMORU)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 80034734
北本 卓也 (KITAMOTO TAKUYA)
山口大学・教育学部・准教授
研究者番号: 30241780
笠井 伸一 (KASAI SHINICHI)
山口大学・教育学部・准教授
研究者番号: 40224373

(3) 連携研究者

()

研究者番号: