

機関番号：16301
研究種目：基盤研究 (C)
研究期間：2008～2010
課題番号：20540177
研究課題名 (和文) ランダム磁場シュレーディンガー作用素のスペクトルの研究
研究課題名 (英文) Spectrum of random magnetic Schrödinger operators
研究代表者
野村 祐司 (NOMURA YUJI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：40282818

研究成果の概要 (和文)：

周期的 Aharonov-Bohm 磁場および一様磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの構造を調べた。特に Landau 準位が、無限多重度の固有値や絶対連続スペクトルになるための条件を与えた。

研究成果の概要 (英文)：

I investigate the spectrum of the Schrödinger operators with homogeneous and periodic Aharonov-Bohm magnetic fields. I give conditions for each Landau level to be an infinitely degenerated eigenvalue or absolutely continuous spectrum.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数理物理学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：シュレーディンガー作用素、スペクトル

1. 研究開始当初の背景

磁場が一様でない系での量子輸送現象が、物理学で理論、実験の両面から注目されているが、その数学的研究は非常に少ないのが当初の現状であり、周期的磁場やランダムな磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの数学的研究が重要と考えられた。

2. 研究の目的

(1) 一様磁場と周期的 Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルを調べる。特にランダウ準位の存在条件を調べ、基本領域内のフラックスの大きさにより相転移 (ランダウ準位から絶対連続スペクトルへの転移) することを証明することである。

(2) ランダム磁場の場合にもランダウ準位の存在条件を研究する。また状態密度関数を調べ、リフシッツテイルと呼ばれる現象を調べる

3. 研究の方法

(1) 一様磁場と周期的 Aharonov-Bohm 磁場の場合には、周期的 Bloch 理論および正準交換関係や楕円関数論を用い、ランダウ準位に対応する微分方程式の解を解析し、スペクトルの情報を得る。

(2) ランダム磁場の場合にはこの方法は使えないが、整関数の零点の分布と無限遠における増大度との関係を用いて、ランダウ準位の存在条件を研究する。

4. 研究成果

(1) 周期的 Aharonov-Bohm 磁場および一様磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの構造を調べた。最小 Landau 準位については、その必要にして十分な存在条件を求めることができ、また固有空間の構造も解明できた。またある状況においては、絶対連続スペクトルが出現することも証明できた。特に、基本領域内を貫く磁束の大きさにより、相転移（多重度無限大の固有値から絶対連続スペクトルへの転移、さらには有理数条件のもとではあるが、レゾルベント集合の元へと変化）することを証明した。さらに高いエネルギーの Landau 準位について考察した。特に第二 Landau 準位の存在条件とその固有空間の構造、および基本領域内を貫く磁束の大きさの閾値において絶対連続スペクトルが出現することなどが示された。スペクトルの下端以上の部分の構造の研究は、比較的困難になり、第二 Landau 準位の相転移が示せたことは興味深いと思われる。

(2) ランダムな Aharonov-Bohm 磁場と一様磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの構造を調べた。一様磁場に Anderson 型、あるいは Poisson-Anderson 型を含む一般のランダム Aharonov-Bohm 磁場を加え、ランダウ準位の存在条件（およびその閾値）を、磁束の平均量によって与えることに成功した。そこでは、整関数の零点分布と無限遠における増大度との精密な関係を与え

る B.Y. Levin の理論を、ランダムな整関数とでもいべき多価な正則関数の場合に拡張し、その増大度を精密に解析することができたことが重要であった。この方法はまだ他にも多くのランダムな対象に応用できる可能性があるように思われる。この結果を

The spectrum of Schrödinger operators with random δ magnetic fields, *Annales de l'Institut Fourier* 59, 2 (2009) 659-689
として発表した。

(3) Anderson 型、あるいは Poisson-Anderson 型を含む一般のランダム Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルに関して、状態密度関数 $E(t)$ のスペクトルの下端での漸近挙動を調べた。作用素のスペクトルを適当な境界条件のもとで有界領域 D_n に制限し、 t 以下の固有値の個数を D_n の体積で割り、これの t を無限大とした時の極限として $E(t)$ は定義される。ランダムポテンシャルの時の状態密度関数のスペクトルの下端での立ち上がりの様子は、ポテンシャルがない場合（自由粒子の場合に対応する）と比べて、非常に遅いことが知られている。この現象はリフシッツテイルと呼ばれ、ランダムポテンシャルの場合、多くの研究がなされてきた。ランダム磁場の時にもこの現象が生じると期待されるが、まだ多くのことが未解明である。Anderson 型、あるいは Poisson-Anderson 型を含む一般のランダム Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレーディンガー作用素の場合にこれを調べ、リフシッツテイルを示すことに成功した。

(4) ある第一種 Fuchs 群の作用に関して不変な、上半平面上の離散集合 G 上の Aharonov-Bohm 磁場および一様磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの構造を調べた。例えば、ユークリッド平面上の周期ポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素のように、平行移動のようなアーベル群が作用する作用素については、Bloch 解析 (Floquet 理論) により、スペクトルのバンド構造やその絶対連続性、スペクトルと Bloch 解との関係など精密なことが結論される。しかし今の状況においては、作用する群

は一般には非可換であるので、Bloch 解析が適用できない。これによりスペクトルの解析がより困難になる。よって個別にでも、非可換群の作用で不変な作用素のスペクトルを解析することは非常に重要である。我々の研究においては、ランダウレベルと呼ばれる多重度無限大の固有値の存在の必要十分条件や固有空間の解構造を調べ、単位面積当たりの磁束の平均量によってランダウレベルの存在条件が表されることを示した。また、その条件において、曲率の寄与の現れ方を示すことができた。ところで、存在条件を求める我々の証明の中では、作用に関して不変な離散集合 G に零点を持つ保型形式と、ある条件を満たすカスプ形式の存在が必要であった。そのために、どのような第一種 Fuchs 群に関して、条件を満たす保型形式が存在するかを判定する必要がある。その研究の中で、上半平面を第一種 Fuchs 群で割ってコンパクト化したリーマン面の幾何的な条件が重要な役割を果たすことが分かってきた。特に、種数により大きく状況が異なるようである。現在小さい種数のリーマン面の場合の研究を進めているところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1. Takuya Mine and Yuji Nomura, The spectrum of Schrödinger operators with periodic Aharonov-Bohm magnetic fields, RIMS Kokyuroku Bessatsu B16 (2010), 135-140, 査読有
 2. Takuya Mine and Yuji Nomura, The spectrum of Schrödinger operators with δ random magnetic fields, Annales de l'Institut Fourier 59, 2 (2009) 659-689, 査読有
 3. Yusuke Higuchi and Yuji Nomura, Spectral structure of Laplacian on a covering graph, Journal of Combinatorics 30 (2009) 570-585, 査読有
 4. Yusuke Higuchi and Yuji Nomura, Non-separating 2-factors of an even-regular graph, Discrete Mathematics 308 (2008) 5538-5547, 査読有
- [学会発表] (計 8 件)
1. 上半平面上の Aharonov-Bohm 磁場, 研究会「第 17 回超局所解析と古典解析」2010 年 11 月, 加賀市山代温泉かんぼの宿
 2. 周期的 Aharonov-Bohm 磁場を持つ Schrödinger 作用素のスペクトルについて, 金沢大学理学部談話会, 2010 年 11 月, 金沢大学理学部
 3. 上半平面上の Aharonov-Bohm 磁場をもつ Schrödinger 作用素, 研究会「数理解析の諸相」, 2010 年 8 月, 山形大学理学部
 4. 上半平面上の Aharonov-Bohm 磁場と保型形式の零点, 作用素論セミナー, 2010 年 7 月, 数理解析研究所京都大学
 5. 周期的およびランダムな Aharonov-Bohm 磁場を持つ Schrödinger 作用素のスペクトル, 日本数学会 2010 年度年会 特別講演, 2010 年 3 月, 慶應義塾大学矢上キャンパス (理工学部)
 6. ユークリッド平面および上半平面上の Aharonov-Bohm 磁場を持つ Schrödinger 作用素のスペクトル, 京都大学数理解析研究所 RIMS 共同研究「微分方程式に対する幾何解析の展開」, 2009 年 9 月, 京都大学農学部
 7. 周期的 Aharonov-Bohm 磁場を持つ Schrödinger 作用素の第二 Landau level について, 作用素論セミナー, 2009 年 7 月, 京都大学総合研究 4 号館
 8. The spectrum of Schrödinger operators with periodic Aharonov-Bohm magnetic fields, 京都大学数理解析研究所研究会「スペクトル・散乱理論とその周辺」2008 年 12 月, 京都大

学数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野村 祐司 (NOMURA YUJI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：40282818

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

伊藤 宏 (ITO HIROSHI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90243005

樋口 雄介 (HIGUCHI YUSUKE)
昭和大学・教養部・講師
研究者番号：20286842

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授
研究者番号：90378597