

機関番号：17104

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540179

研究課題名 (和文) バナッハ空間・関数空間の幾何学的構造と $\psi$ 直和の研究及びその応用

研究課題名 (英文) Research on geometric structures of Banach and function spaces with applications

研究代表者

加藤 幹雄 (Kato Mikio)

九州工業大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：50090551

研究成果の概要 (和文) : バナッハ空間及びその $\psi$ 直和の幾何学的構造について主に次の結果を得た。Von Neumann-Jordan定数とJames定数に関する簡潔な不等式を与え、従来の結果を著しく改良した。また、従来の結果を統一的に見通す不等式を与えた。バナッハ空間の $\psi$ 直和および $\ell_\infty$ 直和の $1$ -非 $\ell_1$ 性を特徴付けた。また任意有限個のバナッハ空間の $\psi$ 直和に対して弱擬 $1$ -滑性を特徴づけた。応用として不動点性や超回帰性に関する結果を与えた。また、シャープ平均三角不等式を与えた。

研究成果の概要 (英文) : We obtained a sequence of results on geometric structures of Banach spaces, especially for their  $\psi$ -direct sums. Major results are as follows. We showed a quite simple inequality between the von Neumann-Jordan and James constants, which refined all the previous results on their relation. We also showed another inequality which gives a unifying sight on these previous results. For  $\psi$ -direct sums, including the  $\ell_\infty$ -sum, we characterized the uniform non- $\ell_1$ -ness, and weak nearly uniform smoothness (for finitely many Banach spaces). As applications some results on the fixed point property and super-reflexivity were given. Sharp mean triangle inequality was shown as well.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析

## 1. 研究開始当初の背景

バナッハ空間の幾何学的構造の研究は近年世界的に一段と活発になっていた。その中であって、申請者等の研究成果が広く関心を集め、国内外で研究されてきていた。

(1) 加藤-高橋[Proc. Amer. Math. Soc.,

1997]は長い間埋もれていた von Neumann-Jordan 定数 (NJ 定数) について一連の結果を発表した。以来、その研究は広範に行われている (A. Jimenez-Melado 他[Proc. Amer. Math. Soc., 2006], Dompongsa 他[Bull. Aust. Math. Soc. 2003]等多数)。加藤-高橋

の結果の一部は[Rao-Ren, Applications of Orlicz spaces, Marcel Dekker, 2002]の第2章に収録された。加藤-Maligranda-高橋 [Studia Math., 2001]ではとくに NJ 定数を用いて一様正規構造・不動点性を導いた。この結果は Gao-Lau [Studia Math., 1991]に端を発した十数年来の未解決問題「uniformly non-square なバナッハ空間は不動点性をもつか」に部分的な解答を与えるものであった。この問題は 2006 年に肯定的な解決を見たが (Garcia-Falset 他 [J. Funct. Anal., 2006], その証明に加藤-Maligranda-高橋 [Studia Math., 2001]の結果が本質的に使われた。

(2) Rademacher type-cotype は、バナッハ空間値の独立確率変数列に対して大数の法則、中心極限定理の成立を保証する重要な概念である。加藤-高橋 [Math. Nachr. 1997]は、一様凸性を導く Clarkson 不等式と Rademacher type を同じ枠組みで捉えた M. Milman の結果 (1984) に注目してその同値性を示した。確率論的性質である type-cotype とバナッハ空間の幾何学的構造の本質的な係わりを明確に示したこの結果は国内外で高い評価を得た。この研究は加藤-Persson-高橋 [Collect. Math., 2000], Nikorova 他 [Arch. Math., 2003]等の研究、また高橋-橋本-加藤 [J. Nonlinear, Convex, Anal., 2002]による strong type-cotype, J. Wenzel [J. Convex Anal., 2005]の strong Martingale type-cotype, さらに山田-高橋-加藤 [J. Math. Anal. Appl., 2006]の重みつき Hanner 型不等式の研究へ進展した。

(3)  $\phi$  直和について：高橋-加藤-斉藤 [J. Inequal. Appl., 2002]で導入されて以来、バナッハ空間の  $\phi$  直和は、 $\ell_p$  直和の概念の拡張としてバナッハ空間論全般において効果的に応用される可能性を秘めていることから、国内外で多くの注目を集め、急速にその研究が進展した。(斉藤-加藤 [J. Math. Anal. Appl., 2003], 加藤-斉藤-田村 [J. Aust. Math. Soc., 2003], 加藤-斉藤-田村 [Math. Inequal. Appl., 2004], 加藤-田村 [Comment. Math. Prace Mat., 2006], Dowling [J. Math. Anal. Appl., 2003], Dowling-Turett [J. Math. Anal. Appl., 2006], Saejung [J. Nonlinear Anal., 2007]等)。

また、 $\phi$  直和の uniform non- $\ell_1^n$ -ness の研究過程で得られた加藤-斎藤-田村 [Math. Inequal. Appl., 2007]の sharp triangle inequality は発表後すぐに国内外で高い評価を得て注目を集めた。

## 2. 研究の目的

本研究では、「バナッハ空間・関数空間の幾何学的構造」について幾何学的定数を用いた詳細な研究を進める。とくに正規構造など、不動点性に係る幾何学的構造、また、

Rademacher type-cotype に係る幾何学的構造に重点を置いた研究を進める。また、申請者等により導入された「バナッハ空間の  $\phi$  直和」について包括的な研究を進め、その理論体系を整備していく。 $\phi$  直和はすでに不動点性や超回帰性などに関する例の構成に使われているが、今後、バナッハ空間論の研究で広く効果的に用いられる可能性が大きい。この点で本研究の果たす役割は重要である。

## 3. 研究の方法

バナッハ空間や関数空間の幾何学的構造はノルム不等式で記述されることが多い。それらの不等式を取り扱う際、「補間法」の手法を積極的に用いる。これは「バナッハ空間の幾何学」の研究に新たな視点を与えるものであり、従来の手法では得がたい質的に新たな成果を生み出す可能性を秘めている。またバナッハ空間の研究において、 $\phi$  直和を用いて非  $\ell_p$  型ノルムを具体的に考察する。

研究分担者と十分な研究打合せを行い、着実な研究の進展を図るとともに、国際会議、学会、各種研究集会での成果発表を通じて研究の方向性を検証しつつ、研究を進める。

## 4. 研究成果

(1) 加藤-Maligranda-高橋 (Studia Math., 2001) の von Neumann-Jordan 定数 (NJ 定数) と James 定数に関する不等式は広く注目を集め、多くの改良がなされてきたが、高橋-加藤は“最終的な”改良として最も簡潔な不等式  $C_{NJ}(X) \leq J(X)$  を与えた (J. Math. Anal. Appl., 2009)。

(2) (1)の一連の改良を統一的に見通す不等式を与えた。また(1)の不等式に、より簡潔な証明を与えた (Rend. Circ. Mat. Palermo, 2010)。

(3)  $\ell_\infty$ -sumの uniform non- $\ell_1^n$ -ness及びその不動点性、超回帰性への応用に関する結果を得た (Comment. Math., 2009)。

(4) バナッハ空間の  $\phi$  直和の uniform non- $\ell_1^n$ -nessに関する一連の結果を与えた (J. Nonlinear Convex Anal., 2010)。

(5) 加藤-斉藤-田村の Sharp triangle inequality (Math. Inequal. Appl., 2007) の一般化として Sharp mean triangle inequality を証明した (Math. Inequal. Appl., 2010)。

(6) 任意有限個のバナッハ空間の  $\phi$  直和に対して weak nearly uniform smoothness を特徴づけた (preprint)。

(7) (6)に関連して、 $\ell_1$ 型ノルムを生成する凸関数の族を導入し、その性質を明らかにした (preprint)。

(8) Modulus of smoothness に関わる新たな幾何学的定数  $A(X)$  を導入して, 一連の結果を与えた。とくに(1)の高橋 - 加藤の不等式(J. Math. Anal. Appl., 2009)に簡潔な別証明を与えた (preprint)。

(9) Zbaganu定数に関して一連の結果を得た (preprint)。

(10) Sine 曲線や懸垂線などの初等的な関数から構成した absolute ノルムの NJ 定数を決定した (preprint)。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

① Y. Takahashi and M. Kato, Some inequalities concerning geometric constants of Banach spaces, 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載決定。

② Y. Takahashi and M. Kato, Some geometric constants related with the modulus of convexity of a Banach space, 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載決定。

③ M. Kato and Y. Takahashi, Some recent results on geometric constants of Banach spaces, Proceedings of the 8th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (Rhodes, Greece, Sep. 19-25, 2010), pp. 4, to appear.

④ K.-S. Saito and K.-I. Mitani, On sharp triangle inequalities in Banach spaces and their application, In: "Banach and Function Spaces III", eds. M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki (Proceedings of the Third International Symposium on Banach and Function Spaces 2009, Sep. 14-Sep.17, 2009, Kitakyushu, Japan), Yokohama Publishers, pp. 295-304, in print.

⑤ Y. Takahashi and M. Kato, On the inequality  $C_{NJ}(X) \leq J(X)$ , In: "Banach and Function Spaces III", eds. M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki (Proceedings of the Third International Symposium on Banach and Function Spaces 2009, Sep. 14-Sep.17, 2009, Kitakyushu, Japan), Yokohama Publishers, pp. 317-328, in print.

⑥ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, James type constant of a Banach space, 実解析学シンポジウム 42 (2011), 71-74.

⑦ T. Suzuki, Characterizations of reflexivity and compactness via the strong Ekeland variational principle, Nonlinear Anal. 72 (2010), 2204-2209.

⑧ K.-I. Mitani and K.-S. Saito, Sharp triangle inequalities for Banach spaces II, J. Inequal. Appl. vol. 2010, Article ID 323609, pp. 17.

⑨ M. Fujii, M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, Sharp mean triangle inequality, Math. Inequal. Appl. 13 (2010), 743-752.

⑩ M. Kato and Y. Takahashi, On sharp estimates concerning the von Neumann-Jordan and James constants for a Banach space, Rend. Circ. Mat. Palermo Serie II Suppl. 82 (2010), 75-91.

⑪ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, バナッハ空間の幾何学的定数に関する最近の話題, 京都大学数理解析研究所講究録 1683 (2010), 39-44.

⑫ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, James and von Neumann-Jordan constants for Banach sequence spaces  $\ell_2(X)$ , 実解析学シンポジウム 41 (2010), 103-106.

⑬ M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, Uniform non- $\ell_1^n$ -ness of  $\psi$ -direct sums of Banach spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 11 (2010), 13-33.

⑭ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some results on new geometric constants of Banach spaces, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics 143 (2010), 48-53.

⑮ T. Suzuki, Fixed point property for nonexpansive mappings versus that for nonexpansive semigroups, Nonlinear Anal. 70 (2009), 3358-3361.

⑯ M. Kato and T. Tamura, Uniform non- $\ell_1^n$ -ness of  $\ell_\infty$ -sums of Banach spaces, Comment. Math. 49 (2009), 179-187.

⑰ Y. Takahashi and M. Kato, A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009), 602-609.

⑱ K.-I. Mitani and K.-S. Saito, Dual of two dimensional Lorentz sequence spaces, Nonlinear Anal., 71 (2009), 5238-5247.

⑲ T. Tamura, M. Kato and Y. Takahashi, On the coefficient of weak orthogonality and normal structure, 京都大学数理解析研究所講究録 1643 (2009), 112-115.

⑳ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some recent results on Gao's constants, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics 139 (2009), 67-72.

㉑ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Dragomir 型不等式と Maligranda 型不等式, 実解析学シンポジウム 40 (2009), 13-16.

㉒ T. Suzuki, A sufficient and necessary condition for the convergence of the sequence of successive approximations to a unique fixed point, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 4089-4093.

㉓ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Dunkl-Williams 型不等式と幾何学的定数, 京都大学数理解析研究所講究録 1615 (2008), 95-98.

㉔ 田村高幸, 藤井正敏, 加藤幹雄, 斎藤吉助, Sharp triangle inequality の一般化について, 京都大学数理解析研究所講究録 1615 (2008), 75-79.

㉕ T. Tamura and M. Kato, Weak modulus of nearly uniform smoothness, Garcia-Falset coefficient and degree of WORTHness, In: "Banach and Function Spaces II" (Proceedings of the Second International Symposium on Banach and Function Spaces 2006, Sep.14-Sep.17, 2006, Kitakyushu, Japan), Yokohama Publishers, pp. 437-444, 2008.

[学会発表] (計 25 件)

① 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some inequalities concerning geometric constants of Banach spaces, 研究集会「バナッハ空間論の研究とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 2 月.

② 高橋泰嗣, 加藤幹雄, James type constant of a Banach space, 実解析学シンポジウム 2010, 九州工業大学, 2010 年 11 月.

③ M. Kato, Some recent results on geometric constants of Banach spaces (招待講演), The 8th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2010 (ICNAAM 2010), Session: Analysis, Inequalities and Homogenization Theory and Applications, Rhodes, Greece, 2010 年 9 月.

④ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, James, von Neumann-Jordan and Zbaganu constants of a Banach space, 日本数学会秋季総合分科会, 名古屋大学, 2010 年 9 月.

⑤ M. Kato, Some recent results on geometric constants of Banach spaces (招待講演), The 2nd Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Phuket, Thailand, 2010 年 9 月.

⑥ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some geometric constants related with the modulus of convexity of a Banach space, 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 9 月.

⑦ 加藤幹雄, Clarkson 型不等式と type, cotype について---Littlewood 行列と Rademacher 行列, 第 3 回バナッハ空間セミナー, 九州工業大学, 2010 年 4 月.

⑧ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some results on new geometric constants of Banach spaces, 第 18 回関数空間セミナー, 札幌, 日本, 2009 年 12 月.

⑨ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, James and von

Neumann-Jordan constants for Banach sequence spaces  $\ell_2(X)$ , 実解析学シンポジウム 2009, 埼玉, 日本, 2009 年 10 月.

⑩ M. Kato, Some recent results on Banach space geometry (基調講演), The 6th International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Acquafredda di Maratea, Italy, 2009 年 9 月.

⑪ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, On James and von Neumann-Jordan constants of Banach spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 大阪, 日本, 2009 年 9 月.

⑫ 加藤幹雄, On uniform non- $\ell_1$ -ness of Banach spaces (招待講演), 研究集会「関数解析学の研究とその応用」, 新潟, 日本, 2009 年 8 月.

⑬ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, バナッハ空間の幾何学的定数に関する最近の話題, 京都大学数理解析研究所研究集会「非加法性の数理と情報: 凸解析との接点」, 京都, 日本, 2009 年 8 月.

⑭ M. Kato, Some recent results on the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces (招待講演), "Analysis Inequalities and Homogenization Theory" --- Midnight sun conference in honor of Lars-Erik Persson, Lulea, Sweden, 2009 年 6 月.

⑮ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some recent results on James and von Neumann-Jordan constants, 京都大学数理解析研究所研究集会「バナッハ空間及び関数空間論における幾何学的構造の研究とその応用」, 京都, 日本, 2009 年 5 月.

⑯ M. Kato, On inequalities related with uniform convexity (招待講演), The Sixth International Conference on Nonlinear and Convex Analysis, 東京, 2009 年 3 月.

⑰ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Super-reflexivity type cotype and Gao's constants, 日本数学会年会, 東京, 日本, 2009 年 3 月.

⑱ 福田将一, 加藤幹雄, 凸関数から導入されるノルムについて, 第 120 回日本数学会九州支部春の例会, 福岡, 日本, 2009 年 1 月.

⑲ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, On some recent results on Gao's constants, 第 17 回関数空間セミナー, 東京, 日本, 2008 年 12 月.

⑳ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Dragomir 型不等式と Maligranda 型不等式, 実解析学シンポジウム 2008, 山口, 日本, 2008 年 11 月.

㉑ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Dragomir 型不等式について, 日本数学会秋季総合分科会, 東京, 日本, 2008 年 9 月.

㉒ M. Kato, On Hanner type inequalities with a weight in Banach spaces (招待講演), International Workshop on Interpolation Theory Function Spaces and Related Topics,

Toledo, Spain, 2008年9月.

㊸ 田村高幸, 加藤幹雄, 高橋泰嗣, On the coefficient of weak orthogonality and normal structure, 京都大学数理解析研究所研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 京都, 日本, 2008年9月.

㊹ 田村高幸, 藤井正俊, 加藤幹雄, 斎藤吉助, Sharp triangle inequality の一般化について, 京都大学数理解析研究所研究集会「バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用」, 京都, 日本, 2008年6月.

㊺ 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Dunkl-Williams 型不等式と幾何学的定数, 京都大学数理解析研究所研究集会「バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用」, 京都, 日本, 2008年6月.

[図書] (計2件)

① M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki (editors), “Banach and Function Spaces III”, Proceedings of the Third International Symposium on Banach and Function Spaces (Kitakyushu, Japan, Sep. 14-17, 2009), pp. 483, Yokohama Publishers, in print.

② M. Kato and L. Maligranda (editors), “Banach and Function Spaces II”, Proceedings of the Second International Symposium on Banach and Function Spaces (Kitakyushu, Japan, Sep. 14-17, 2006), pp. 467, Yokohama Publishers, 2008.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

加藤 幹雄 (Kato Mikio)  
九州工業大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号: 50090551

### (2) 研究分担者

斎藤 吉助 (Saito Kichi-Suke)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 30018949  
田村 高幸 (Tamura Takayuki)  
千葉大学・大学院人文社会科学研究所・  
助教  
研究者番号: 30302582  
鈴木 智成 (Suzuki Tomonari)  
九州工業大学・大学院工学研究院・准教授  
研究者番号: 00303173  
高橋 泰嗣 (Takahashi Yasuji)  
岡山県立大学・情報工学部・名誉教授  
(H21→H22: 研究協力者)  
研究者番号: 30001853