

機関番号：32407

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540185

研究課題名（和文） 解析・調和関数空間の構造とその上の作用素の性質の研究

研究課題名（英文） Researches on the structures of function spaces of analytic and harmonic functions and operators on them

研究代表者

大野 修一（OHNO SHUICHI）

日本工業大学・工学部・准教授

研究者番号：20265367

研究成果の概要（和文）：本研究の主たる課題は「合成」という演算のもつ位相構造を明らかにするということである。「合成」は繰り返すという「積」については自明であるが、「和」や「差」については何の情報もなかった。ここでは、いくつかの合成演算の和（線形和）についての作用素としての特性、特に数学的には重要課題であるコンパクト性について特徴付けた。

研究成果の概要（英文）：Main object of this research is to investigate the topological structure of composition operators on various analytic and harmonic function spaces. The product of composition operators also is trivially a composition operator, but the sum and the difference of them are not clear. We here obtain results for linear combinations of composition operators to act compactly between two function spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 基礎解析学

キーワード：合成作用素, 荷重合成作用素, Hardy 空間, Bergman 空間, Bloch 空間
有界性, コンパクト性, 不変部分空間

1. 研究開始当初の背景

単位円板上の解析関数空間の理論は、20 世紀初頭の G.H. Hardy, J.E. Littlewood 等による研究を源としている。そして、「関数解析学」の発展に伴い、線形空間としてこれらの関数空間をみることによって、理論の重要な発展を導く新しい手法が供給されてきている。我々の研究主題は解析、調和関数空間のもつ構造とそれら関数空間上の作用素の性質の研究である。この研究は複素解析学と作用素論のインターフェイスにある分野であるため、重要な主題となってい

るばかりでなく、その応用面も多岐にわたっている。最近の好例は、1984 年の L. de Branges による Bieberbach の予想への解答である。彼は、20 世紀における重要な数学の問題の一つであったこの複素関数論の問題に対して、ある作用素（実は合成作用素）の値域である関数空間を利用するという関数解析的手法で解答を与えた。この空間は Hilbert 空間であり、現在このタイプの空間は de Branges-Rovnyak 空間と呼ばれている。このように、この研究は分野を超えた、予想さえ出来ない応用を生む特色と意義を

持っている。

2. 研究の目的

我々の本研究における目的は、解析、調和関数空間上の乗法作用素, Toeplitz, Hankel 作用素, そして合成作用素といった作用素の関数解析学的性質を、定義域であるその関数空間に属する解析、調和関数の性質で特徴付けることである。考えられる関数空間は単位円板上の Hardy 空間であり、Bergman 空間であり、Bloch 空間である。

具体的には次のような問題を明らかにしたい。

(1) まず、単位円板上の有界解析関数空間や有界調和関数空間上の(荷重)合成作用素の位相構造である。これは、もともと Hilbert Hardy 空間における Shapiro-Sundberg による合成作用素の位相構造の問題に端を発している。位相構造を考えるための第1次的問題は「2つの(荷重)合成作用素がいつコンパクト作用素になるか」であるため、これが具体的な目的となる。研究分担者の泉池敬司教授と考察を試みる。また、作用素論研究者から、有界な解析関数空間上の合成作用素の位相構造問題について、作用素の強位相の場合の特徴付けという示唆を受けているので、その問題も視野に入りたい。

(2) Bloch 空間上については、研究協力者の細川卓也氏に、フィンランド、ヘルシンキ大の P. Nieminen も加えた共同研究として、合成作用素の一次結合についての考察を試みる。

細川氏とは、Bloch 空間と有界解析関数空間の間で作用する2つの荷重合成作用素の差の有界性、コンパクト性も特徴付けたい。

(3) 海外研究協力者の K. Stroethoff (米・Montana 大) との共同研究で、Hilbert Hardy 空間や Bergman 空間を拡張した「ある再性核をもつような Banach 空間」から Bloch 空間に作用する荷重合成作用素の有界性、コンパクト性を特徴付けたい。また、この拡張した空間は「Dirichlet 空間」を含んでいないため、「荷重 Dirichlet 空間」の研究へ発展させたい。

(4) Hilbert Hardy, Banach 空間の場合の「不変部分空間問題」を、合成作用素をはじめとした具体的な作用素で、泉池教授と考察したい。

3. 研究の方法

研究体制は、研究代表者が中心となり、課題ごとに国内外の研究協力者と、e-mail による情報交換、研究打ち合わせの出張による討議、検討により研究を進めた。

特に、泉池教授との共同研究は、夏、春季休暇期間中の新潟大学での1週間程度の滞

在で行われた。もともとこの方法は泉池教授の外国研究者との共同研究は何の準備もない2週間程度の大学滞中に端を発しているという示唆に因る。氏と新潟大学数学教室の御好意により、コンピュータ付のオフィスを用意していただき、集中的に研究が出来た。

Bloch 空間上の合成作用素についての研究も、研究協力者の細川卓也氏と、随時草稿を添付した e-mail による情報交換を行い、夏、春季休暇期間中の茨城大学への出張で集中的に押し進めた。

また、関連分野の知識の交流および獲得のため、大野は2001年より日本工業大学において「宮代セミナー」を年2回程度主催しているが、本研究期間中も開催し、Nguyenをはじめとした幾つかの共同研究に発展した。

4. 研究成果

(1) 単位円板上の有界解析関数空間における合成作用素の問題については、研究分担者の泉池敬司教授と共に、有限個の合成作用素の一次結合の compact 性を完全に特徴づけ、essential norm の評価を与えた。norm 評価については係数の実部が正の場合の成果を得たが、関連する問題も浮き彫りにされ、引き続きの課題となった。合成作用素の一次結合の問題はこの分野の研究者の注目を集め、いろいろな関数空間で考えられるようになった。

有界調和関数空間における合成作用素については、泉池教授と共に、その位相構造は有界解析関数空間の場合と同値であることを示し、荷重合成作用素を定義することにより、その essential norm の評価を与えた。乗法が定義できない「調和関数空間」に定義された荷重合成作用素はそれ自体興味あるものであり、更なる性質の考察が望まれる。

(2) 研究分担者の泉池氏は、New York State 大の Yang 教授と、1変数の内部関数を利用して、2変数の Hardy 空間の中にねじれるようにして作られる逆不変部分空間は1変数の Bergman 空間を一般化した構造を持つことを示した。2変数の Hardy 空間でクロス交換子がランク1になる、ある条件をみだす不変部分空間の構造を決定した。Fudan 大の Guo 教授と、1変数のフォック型の空間における合成作用素に対する、スペクトル、サイクリック性、ハイパーサイクリック性、不変部分空間などの基本的問題を解決した。

(3) Hardy 空間上の合成作用素の研究として、「完全連続性」の特徴付けを考えた。この性質は作用素のコンパクト性の研究から派生したものだが、現在でも十分な解析は進んでいない。しかし、コンパクト性、弱コンパクト性との比較や、Dunford-Pettis の性質といった関数解析学の重要な概念との関連がある

重要な性質である。大野は一乗可積分な解析関数の Hardy 空間で合成作用素の線形結合の場合の特徴づけを試み、その部分解を 2009 年新潟大学で開催の 14th Analytic function spaces seminar で発表した。そこに参加していた Nguyen Quang Dieu (ベトナム、ハノイ教育大) と共同研究を開始し、完全な解答を得た。また、Nguyen とはその後いくつかの共同研究をすることとなった。

(4) Bloch 空間においては、合成作用素と微分作用素の積についての有界性、コンパクト性の完全な特徴づけを行った。Bloch 空間に微分演算を考えることは、最近活発に研究されている Bloch-type 空間や Zygmund 空間への有効な手段を提供することになった。

(5) 泉池氏は、多変数 Hardy 空間における不変部分空間を特徴付ける Beurling type の定理の Shimorin による証明を、基本的な手法だけで別証明した。

(6) 「合成作用素の集合の位相構造」の問題については、disk 環上の 2 つの荷重合成作用素の差のコンパクト性を特徴付けた。これは、有界解析関数空間の場合で使えた「弱収束定理」が成り立たないため、新しい知見が必要であった。また、この結果はさらに泉池教授と「有界解析関数空間上の荷重合成作用素の和」についての研究に発展し、有界解析関数空間と disk 環との間の関係に注目を与えることになった。

(7) Bloch 空間では、合成作用素の線形結合のコンパクト性について、細川卓也(茨城大・工), Pekka J. Nieminen (フィンランド、ヘルシンキ大) らと特徴付けた。有界解析関数空間上の合成作用素の差のコンパクト性は、有界解析関数空間と Bloch 空間の間の合成作用素の挙動と関係しているが、細川と荷重合成作用素の差の有界性、コンパクト性についても考察した。

(8) 泉池教授、Nguyen Quang Dieu (ヴェトナム、ハノイ教育大) との共同研究で、異なる多次元 Hardy 空間の間の合成作用素の有界性、コンパクト性について特徴付けた。またこの結果が、Hardy 空間上の荷重合成作用素の有界性に関係している知見を得た。

(9) Hardy, Bergman 空間を拡張した「ある再生核をもつ解析関数空間」から Bloch 空間への荷重合成作用素の有界性、コンパクト性について、海外研究協力者である Karel Stroethoff (米・モンタナ大) と完全な特徴付けを行なった。引き続き、weighted Dirichlet 空間から Bloch-type 空間への荷重合成作用素の性質を考えることとなった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

① Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi, Shuichi Ohno, Weighted composition operators on the space of bounded harmonic functions, to appear in Integral Equations Operator Theory, 査読有。

② Takuya Hosokawa, Shuichi Ohno, Differences of weighted composition operators acting from Bloch space to H^∞ , to appear in Trans. Amer. Math. Soc., 査読有。

③ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk, to appear in J. Korean Math., 査読有。

④ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Yuko Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem III, to appear in J. Math. Soc. Japan, 査読有。

⑤ Kou Hei Izuchi, Kei Ji Izuchi, Masatoshi Naito, Mixed invariant subspaces over the bidisk, to appear in Complex Anal. Op. Theory, 査読有。

⑥ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Yuko Izuchi, Ranks of invariant subspaces of the Hardy space over the bidisk, to appear in J. Reine Angew. Math., 査読有。

⑦ Shuichi Ohno, Karel Stroethoff, Weighted composition operators from reproducing Hilbert spaces to Bloch spaces, to appear in Houston J. Math., 査読有。

⑧ Takuya Hosokawa, Pekka J. Nieminen, Shuichi Ohno, Linear combinations of composition operators on the Bloch spaces, to appear in Canadian J. Math., 査読有。

⑨ Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi, Factorization of Blaschke products and ideal theory in H^∞ , J. Funct. Anal., 査読有, 260(2011), 2086-2147。

⑩ Shuichi Ohno, Differences of weighted composition operators on the disk algebra, Bulletin of the Belgian Mathematical Society -- Simon Stevin, 査読有, 17(2010), 101-107。

⑪ Nguyen Quang Dieu, Shuichi Ohno, Complete continuity of linear combinations of composition operators, Archiv der Mathematik, 査読有, 94(2010), 67--72。

⑫ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Yuko Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem II, New York J. Math., 査読有, 16(2010), 489-505。

⑬ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Ranks of cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk, Rocky

Mountain J. Math., 査読有, 40(2010), 929-942.

⑭ Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi, Factorization of Blaschke products and primary ideals in H^∞ , J. Funct. Anal., 査読有, 259(2010), 975-1013.

⑮ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Yuko Izuchi, Quasi-wandering subspaces in the Bergman space, Integral Equations Operator Theory, 査読有, 67(2010), 151-161.

⑯ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Yuko Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling theorem I, Arch. Math. (Basel), 査読有, 95(2010), 439-446.

⑰ Shuichi Ohno, Products of differentiation and composition on Bloch spaces, Bull. Korean Math. Soc., 査読有, 45(2009), 1135-1140.

⑱ Shuichi Ohno, Linear relations of composition operators, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1669(2009), 132-143.

⑲ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Rank-one commutators on backward shift invariant subspaces on the bidisk, Acta Math. Sin. (Engl. Ser), 査読有, 25(2009), 693-714.

⑳ Kei Ji Izuchi, Masatoshi Naito, Equivalence classes of mixed invariant subspaces over the bidisk, Nihonkai Math. J., 査読有, 20(2009), 145-154.

㉑ Jun Soo Choa, Kei Ji Izuchi, Shuichi Ohno, Composition operators on the space of bounded harmonic functions, Integral Equations Operator Theory, 査読有, 61(2008), 167-186.

㉒ Kei Ji Izuchi, Shuichi Ohno, Linear combinations of composition operators on H^∞ , J. Math. Anal. Appl., 査読有, 338(2008), 820-839.

㉓ Kei Ji Izuchi, Rongwei Yang, N_Ψ -type quotient modules on the torus, New York J. Math., 査読有, 14(2008), 431-457.

㉔ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi, Rank-one commutators on invariant subspaces of the Hardy space on the bidisk II, J. Operator Theory, 査読有, 60(2008), 239-251.

㉕ Kunyu Guo, Kei Ji Izuchi, Composition operators on Fock type spaces, Acta Sci. Math. (Szeged), 査読有, 74(2008), 807-828.

[学会発表] (計 20 件)

① Shuichi Ohno, Weighted composition operators from Bloch spaces to Hardy spaces, The 19th Miyashiro Seminar, 2011年1月9日, Nippon Inst. Tech.

② Kei Ji Izuchi, Wandering subspaces and

the Beurling type theorem, 第19回関数空間セミナー, 2010年12月25日, 北海道大学.

③ Kei Ji Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem, The 13th Conference on Real and Complex Analysis in Hiroshima, 2010年12月20日, Hiroshima University.

④ 大野 修一, Products of differentiation and composition on Bloch spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学, 名古屋.

⑤ Nguyen Quang Dieu, 大野 修一, Complete continuity of linear combinations of composition operators, 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学, 名古屋.

⑥ 泉池敬司, 泉池佑子, Factorization of Blaschke products and primary ideals in H^∞ , 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学, 名古屋.

⑦ 大野 修一, The reproducing Hilbert spaces, 可換 Banach 環と種々の分野との交流 II, 2010年6月26日, 山形大学, 山形.

⑧ Shuichi Ohno, Composition operators induced by analytic maps from a unit disk to a polydisk, The 18th Miyashiro Seminar, 2010年6月19日, Nippon Inst. Tech.

⑨ 細川 卓也, 大野 修一, Differences of weighted composition operators acting from Bloch space to H^∞ , 日立函数解析学セミナー2010, 2010年3月9日, 茨城大学工学部, 茨城.

⑩ Jun Soo Choa, 泉池 敬司, 大野修一, Composition operators on the space of bounded harmonic functions, 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析学分科会, 2009年9月26日, 大阪大学.

⑪ Shuichi Ohno, Complete continuity of composition operators, The 14th Analytic Function Spaces Seminar, 2009年6月27日, Department of Mathematics, Niigata University.

⑫ Kei Ji Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem I, The 14th Analytic Function Spaces Seminar, 2009年6月27日, Department of Mathematics, Niigata University.

⑬ Shuichi Ohno, Linear relations of composition operators, RIMS Workshop Potential Theory and Related Fields, 2009年2月18日, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto.

⑭ Shuichi Ohno, Topological structure of the set of composition operators on the

space of bounded harmonic function, The Twelfth Conference on Real and Complex Analysis, Korea-Japan Seminar on Analysis, 2008 年 12 月 5 日, Tohoku University, Sendai, Japan.

⑮ Kei Ji Izuchi, Cross commutators on invariant subspaces over the bidisk, Seminar: Operator theory on the function spaces, 2008 年 11 月 7 日, Jiaying University, P.R. China.

⑯ Kei Ji Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem, II, Seminar: Operator theory on the function spaces, 2008 年 11 月 5 日, Jiaying University, P.R. China.

⑰ Kei Ji Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem, I, Seminar: Operator theory on the function spaces, 2008 年 11 月 3 日, Jiaying University, P.R. China.

⑱ 泉池 敬司, 大野 修一, Linear combinations of composition operators on H^∞ , 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 27 日, 東京工業大学.

⑲ Kei Ji Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem II, Seminar: Operator theory on the function spaces, 2008 年 8 月 4 日, New York State Univ. Albany, USA.

⑳ Kei Ji Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem, Concentration Week on Multivariable Operator Theory, 2008 年 7 月 30 日, Texas A&M University, USA.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大野 修一 (OHNO SHUICHI)
日本工業大学・工学部・准教授
研究者番号: 20265367

(2) 研究分担者

泉池 敬司 (IZUCHI KEI JI)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号: 80120963

(3) 連携研究者

()

研究者番号: