

機関番号：32660

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540189

研究課題名 (和文) コンピュータを活用した作用素不等式の開発・発展とその応用

研究課題名 (英文) Development of operator inequalities and their applications by using computers

研究代表者

柳田 昌宏 (YANAGIDA MASAHIRO)

東京理科大学・理学部・講師

研究者番号：50318200

研究成果の概要 (和文)：ヒルベルト空間上の線形作用素とは、いわば無限次元の行列である。自己共役な有界線形作用素の不等式は実数の不等式を一般化したものであるが、作用素は乗法について交換可能でないことから、数で成り立つ不等式がそのまま作用素で成り立つとは限らない。本研究では、コンピュータを活用することにより、新たな作用素不等式を開発した。また、それらを応用することにより、関連する分野における新たな結果を示した。

研究成果の概要 (英文)：A linear operator on a Hilbert space can be regarded as an infinite-dimensional matrix. An inequality for selfadjoint bounded linear operators is a generalization of one for real numbers. An inequality for real numbers does not always hold for operators because of their noncommutativity. In this research, we developed new operator inequalities by using computers. We also show new results in related fields by applying them.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：関数解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：作用素不等式, log-majorization, Löwner-Heinz の不等式, 古田不等式, データ処理不等式, 正值線形写像, 作用素方程式, Thompson 計量

1. 研究開始当初の背景

(1) 1934 年に発表された Löwner-Heinz の不等式は、強い制限のため応用する上で不便であった。そこで開発されたのが古田不等式であり、1987 年に発表されて以来、作用素論において重要な役割を果たしている。

(2) 連携協力者は古田不等式の開発者であり、作用素不等式とその応用について、研究代表者と共同研究を行っていた。

2. 研究の目的

(1) 作用素不等式の開発・発展を目指す。特に、一般化古田不等式及び関連する作用素値関数に関する結果の更なる発展を研究する。

(2) 作用素不等式の応用を研究する。特に、情報理論における Shannon の不等式を作用素版へと一般化し、更にその応用を得ることを目指す。

3. 研究の方法

(1) 予想を検証する段階において、コンピュータを積極的に活用した。特に、数式処理ソフトウェア等を用いて、乱数からなる行列が予想の不等式を満たすかどうかを確かめる、という計算を莫大な回数繰り返し行うことにより、その予想の正当性を検討した。作用素不等式の反例は低い次数の行列から得られることが多いため、研究を推進する支えとして、この手法は極めて有効であった。

(2) 学会や研究集会に積極的に参加し、成果発表を行った。その結果、多くの研究者から示唆に富むコメントをいただいたり、更には共同研究のきっかけになったりと、研究の推進に大いに役立った。

4. 研究成果

(1) 一般化古田不等式に関連する二変数作用素値関数に対して、一方の変数について単調性を満たすような変数の領域に関する新たな結果を得た。

(2) 冪等や冪零な作用素の極分解について新たな結果を示し、またその応用を得た。

(3) Löwner の積分表示を用いない初等的な方法により、作用素単調関数の具体例を得た。

(4) 一般化古田不等式のさらなる一般化として、反復的な形式を持つ新たな不等式を示した。また、その log-majorization への応用を得た。

(5) 古田不等式を応用することにより、ある種の作用素方程式の正定値な解の存在を証明した。また、これらの解から、半正定値行列の幾つかの具体例を示した。

(6) 単位的な正值線形写像に関する有名な Choi の不等式と、最近の Bourin-Ricard による不等式を補間する、より一般化された不等式を示した。

(7) 半正定値行列の凸錐における Thompson 計量に関して平行四辺形的な性質を持つ四辺形について、幾つかの幾何学的な性質を得た。

(8) 情報理論におけるデータ処理不等式と関連する行列不等式の研究を行い、二元通信

路に対する Evens-Schulman による逆不等式の一般化を試みた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① Masatoshi Ito, Yuki Seo, Takeaki Yamazaki and Masahiro Yanagida, Geometric properties of positive definite matrices cone with respect to the Thompson metric, Linear Algebra and its Applications, 査読有, 掲載予定
- ② Takayuki Furuta, Around Choi inequalities for positive linear maps, Linear Algebra and its Applications, 査読有, 434 巻, 2011 年, 14--17 頁
- ③ Takayuki Furuta, Positive semidefinite solutions of the operator equation $\sum_{j=1}^n A^{n-j} X A^{j-1} = B$, Linear Algebra and its Applications, 査読有, 432 巻, 2010 年, 949--955 頁
- ④ Takayuki Furuta, An extension of order preserving operator inequality, Mathematical Inequalities and Applications, 査読有, 13 巻, 2010 年, 49--56 頁
- ⑤ Masatoshi Ito, Yuki Seo, Takeaki Yamazaki and Masahiro Yanagida, On a geometric property of positive definite matrices cone, Banach Journal of Mathematical Analysis, 査読有, 3 巻, 2009 年, 64--76 頁
- ⑥ Takayuki Furuta, Operator function associated with an order preserving, operator inequality, Journal of Mathematical Inequalities, 査読有, 3 巻, 2009 年, 21--29 頁
- ⑦ Takayuki Furuta, Log majorization via an order preserving operator inequality, Linear Algebra and its Applications, 査読有, 431 巻, 2009 年, 132--138 頁

- ⑧ Takayuki Furuta Concrete examples of operator monotone functions obtained by an elementary method without appealing to Löwner integral representation, Linear Algebra and its Applications, 査読有, 429 巻, 2008 年, 972--980 頁
- ⑨ Takayuki Furuta, Applications of polar decompositions of idempotent and 2-nilpotent operators, Linear and Multilinear Algebra, 査読有, 56 巻, 2008 年, 69--79 頁
- ⑩ Takayuki Furuta, Monotonicity of order preserving operator functions, Linear Algebra and its Applications, 査読有, 428 巻, 2008 年, 1072--1082 頁
- ⑪ Takayuki Furuta, Brief survey of recent applications of an order preserving operator inequality, Taiwanese Journal of Mathematics, 査読有, 12 巻, 2008 年, 2113--2135 頁
- ⑫ Takayuki Furuta, Further extension of an order preserving operator inequality, Journal of Mathematical Inequalities, 査読有, 2 巻, 2008 年, 465--472 頁

[学会発表] (計 15 件)

- ① 伊藤 公智・瀬尾 祐貴・柳田 昌宏・山崎 文明, Geometric properties of positive definite matrices cone with respect to the Thompson metric, 日本数学会 2011 年度年会, 2011 年 3 月 22 日, 早稲田大学西早稲田キャンパス
- ② 古田 孝之, Asymmetric variation of Choi inequality for positive linear map, 作用素論における非可換構造の研究とその応用, 2010 年 10 月 28 日, 京都大学数理解析研究所
- ③ Takayuki Furuta, Operator equations via an order preserving operator inequality, The 16th Conference of the International Linear Algebra Society, 2010 年 6 月 22 日, Palazzo dei Congressi (イタリア)

- ④ Masahiro Yanagida, Matrix inequalities associated with the data processing inequality, The 16th Conference of the International Linear Algebra Society, 2010 年 6 月 21 日, Palazzo dei Congressi (イタリア)
- ⑤ 古田 孝之, Operator equations $\sum_{j=1}^n A^{n-j} X A^{j-1} = B$ via an operator inequality, 日本数学会 2010 年度年会, 2010 年 3 月 25 日, 慶應義塾大学矢上キャンパス
- ⑥ 古田 孝之, Operator equations via an order preserving operator inequality, 作用素論における非可換解析学の展望, 2009 年 10 月 29 日, 京都大学
- ⑦ 古田 孝之, 順序を保存する作用素不等式の発展と応用, 関数解析学の研究とその応用, 2009 年 8 月 28 日, クロスパルにいがた
- ⑧ 柳田 昌宏, Matrix inequalities associated with the data processing inequality, 関数解析学の研究とその応用, 2009 年 8 月 27 日, クロスパルにいがた
- ⑨ Takayuki Furuta, An order preserving operator inequality and its application, The 11th KOTAC International Conference 2009 Operator Theory and Its Applications, 2009 年 6 月 18 日, Kyungpook National University (韓国)
- ⑩ 山崎 文明・伊藤 公智・瀬尾 祐貴・柳田 昌宏, On a geometric property of positive definite matrices cone, 日本数学会 2009 年度年会, 2009 年 3 月 28 日, 東京大学駒場キャンパス
- ⑪ 古田 孝之, Further extension of an order preserving operator inequality, 第 17 回関数空間セミナー, 2008 年 12 月 25 日, 東京理科大学
- ⑫ 古田 孝之, Further extension of an order preserving operator inequality, 作用素論への幾何学の応用, 2008 年 10 月 30 日, 京都大学数理解析研究所

- ⑬ 古田 孝之, An order preserving operator inequality and its generalization, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, 2008年 9 月 24 日, 東京工業大学大岡山キャンパス
- ⑭ Masahiro Yanagida, Operator inequalities obtained from Uchiyama's results on operator monotonicity, 19th International Workshop on Operator Theory and its Applications, 2008 年 7 月 23 日, College of William and Mary (アメリカ)
- ⑮ Takayuki Furuta, Further extension of order preserving operator inequality and its application, 19th International Workshop on Operator Theory and its Applications, 2008 年 7 月 22 日, College of William and Mary (アメリカ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柳田 昌宏 (YANAGIDA MASAHIRO)
東京理科大学・理学部・講師
研究者番号：50318200
(2008～2009：研究分担者)

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

古田 孝之 (FURUTA TAKAYUKI)
弘前大学・名誉教授
研究者番号：40007612
(2008～2009：研究代表者)