様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月３１日現在

機関番号：32660
研究種目：基盤研究 （Ｃ）
研究期間：2008 年度 ～ 2012 年度
課題番号：20540190
研究課題名（和文） 発展方程式とそのレゾルベント問題

研究課題名（英文） Evolution equations and their resolvent problems

研究代表者
岡沢 登（Okazawa Noboru）
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：80120179

研究成果の概要（和文）：計画調書に述べた３つの課題
(A) 複素 Ginzburg-Landau 方程式;
(B) 2 階線形放物型方程式の 1 階微分の係数関数が非有界なもの;
(C) (抽象的) 非正規形双曲型発展方程式
に加えて, (A), (B), (C)から派生した問題およびその応用として
(D) Dirac 方程式および時間に依存するポテンシャルをもつ線形 Schrödinger 方程式;
(E) 逆 2 乗ポテンシャルをもつ非線形 Schrödinger 方程式;
(F) Schrödinger 作用素 $-\Delta+t|x|^{-2}$ の 4 階版 $\Delta^2+t|x|^{-4}$ (t は実パラメータ);
(G) L^p $(p\neq 2)$での Schrödinger 作用素の holomorphic family $\{-\Delta+\kappa V(x)\}$ (κ は複素パラメータ);
(H) 1 階微分の係数関数が非有界な 2 階線形楕円型作用素が生成する半群の解析性
の 5 つの研究も並列的に進めることができた.

研究成果の概要（英文）：Three main subjects in the application form are stated as follows:
(A) The complex Ginzburg-Landau equation;
(B) 2nd order linear parabolic equations including 1st order terms with unbounded coefficients;
(C) (abstract) non-normal form evolution equations of hyperbolic type.
Also, we have studied five subjects related to (A), (B) and (C):
(D) The Dirac equation and linear Schrödinger equation with time-dependent potential;
(E) Nonlinear Schrödinger equation with inverse-square potential;
(F) The operator $\Delta^2+t|x|^{-4}$ as a 4^{th} order analog of Schrödinger operator $-\Delta+t|x|^{-2}$ (t is a real parameter);
(G) Holomorphic family of Schrödinger operator $\{-\Delta+\kappa V(x)\}$ in L^p (κ is a complex parameter);
(H) Analyticity of the semigroups generated by 2^{nd} order linear elliptic operators including 1^{st} order terms with unbounded coefficients.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
総 計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・基礎解析学
キーワード：　関数解析

１．研究開始当初の背景

研究成果の概要で述べた 3 つの課題(A), (B), (C)を選んだいきさつが明らかになれば，おのずと研究開始当初の背景も見えてくるものと思う．

(A)の研究対象である複素 Ginzburg-Landau 方程式を書き下しておこう（以下では, CGL 方程式ということにする):

$$\partial u/\partial t+(\lambda+i\alpha)(-\Delta)u+(\kappa+i\beta)|u|^{q-2}u-\gamma u = 0.$$

ここで$\partial u/\partial t$は未知関数 u=u(x,t)の時間微分を，他方，Δはラプラス作用素を表す． $i=(-1)^{1/2}$ は虚数単位なのでラプラス作用素と非線形項$|u|^{q-2}u$ の前には複素係数がついているわけである．これが方程式の名前にある複素の由来である．ただし，CGL 方程式というときには，$\lambda>0$，$\kappa>0$ が仮定される．また，この方程式で$\lambda=\kappa=\gamma=0$, $\alpha=\beta=1$ とおいたものが課題(E)の非線形 Schrödinger 方程式である:

$$-i\partial u/\partial t +(-\Delta)u +|u|^{p-1}u = 0.$$

ただし，p := q-1 とおいた．この方程式については既に大量の研究の蓄積があるので，我々は新たに逆 2 乗ポテンシャルつきの問題

$$-i\partial u/\partial t +(-\Delta+ a|x|^{-2})u +|u|^{p-1}u = 0$$

を考察した．ここで，$a > -(N-2)^2/4$ (N は Euclid 空間の次元)である．

(A)では，考える領域が有界ならば，非線形項の複素係数$\kappa+i\beta$ ($\kappa>0$)には何の制限もおかずに初期値を L^2 から取った問題の解の一意存在が Okazawa-Yokota(2004)によって示されていた．ただし，非線形項の冪の指数qには制限$2\le q\le 4/N$が加わる．その後の考察で領域の有界性が除けることは分かってきていたが，原稿は作ったものの事情により投稿先を決めかねていた（後で Roger Temam 教授の古希記念号(DCDS)に出る）．

(B)では Giorgio Metafune 教授(Salento 大)らが丁度 Schrödinger 作用素の一般化として係数が非有界な 1 階微分の項を含む 2 階楕円型作用素の研究を本格化させていた時期に当る．従って，Metafune 教授らが引用していた Okazawa(1996)と未解決問題を含む Kato (1981)を結びつけることも現実味を帯びつつあった．

(C)は，当時院生の一人だった吉井健太郎と共に発展方程式の Kato 理論の Hilbert 空間での改良版を作るという気長な課題と位置付けていたものである．S. Kichenassamy は自身の著書「非線形波動方程式」(1996)の中で，非正規形の方程式が Kato 理論の中でも一番難しい部分になっていると述べている．同氏は更に，holomorphic family of type (A) にも言及しており，発展方程式のみならず線形作用素の摂動についても Kato 理論の良き理解者と感じられるので，ひとつの背景として紹介した次第である．

２．研究の目的

ここでは(A), (B), (C)に加えて，これらから派生した 5 つの課題(D), (E), (F), (G), (H)についても述べていこう．

(A)では初期値を L^2 に取った決定版といえるような完成度の高い原稿を作成し，次の展開に備えることを目的とした．

(D)の Dirac 方程式では遠方で発散するポテンシャルを取り込み，また Schrödinger 方程式では（1 個または複数個の）Coulomb ポテンシャルの中心が時間と共に動く場合に適用可能な抽象論の構築を目的とした．

(E)では方程式に逆二乗ポテンシャルを追加したときの影響が見極めたかった．

(F), (G)は Schrödinger 作用素あるいはその一般化の holomorphic family に関する研究であり，Kato(1984)による L^2 理論の L^p 版の構成が目的であった．

(H)では 2 階楕円型作用素により生成される，ある角領域上での解析的縮小半群が，それより広い角領域上では，解析的**非**縮小半群になる状況を明確にしたかったわけである．ついでながら(A)の CGL 方程式でも類似の状況が生ずるのである．即ち，非線形項の複素係数$\kappa+i\beta$の偏角が小さければ解作用素は(準)縮小半群になるが，$\kappa+i\beta$の偏角が大きくなれば解作用素は，(局所)Lipschitz 半群といわれる非縮小半群を生成することが分かっている．

３．研究の方法

3 つの課題(A) − (C)はいずれも時間変数を含む偏微分方程式の問題である．従って，未知関数u(x,t)を，時間区間$[0,\infty)$上で定義され，Hilbert あるいは Banach 空間 X に値をとる関数u(t)とみなせば，考えるべき問題を抽象的 Cauchy 問題の形に定式化することができる．こうして得られる方程式が発展方程式である．発展方程式の可解性は，ある場合にはそのレゾルベント問題の解の評価と同値になる．３つの課題の研究方法としてはそのすべてを発展方程式として取り扱った．

４．研究成果

研究成果といえば，専門誌に掲載されたものにだけ目を奪われがちだが，次のステップに向けた地道な蓄積もいずれ成虫として目に触れる昆虫の幼虫か蛹に例えられるかもしれない．なお〔雑誌論文〕の[12]，[13]は，継続した研究の流れの中から生まれたものであるが，本研究開始以前に投稿していたものである．

課題(A)と(E)についての成果は〔雑誌論文〕の[1]，[4]，[5]，[6]，[10]として刊行できた．

(A)の CGL 方程式については，研究開始当初の背景に述べた通り，Okazawa-Yokota (2004)での有界領域における結果を全空間の場合を含む非有界領域にまで拡張することが第１の課題であった．これは，これまでの結果の集大成と位置付けられる論文[10]で実現された．即ち，CGL 方程式の初期値(境界値) 問題および Cauchy 問題の強適切性の L^2 理論についてはかなり満足のいく結果が刊行できたと思う．初期値を取るべき関数空間の選択を，先行研究である Ginibre-Velo(1996, 97)のものと比べてみると少しだけ改良の余地があるといわざるを得ないが，L^2 空間に限定すれば凸関数に対する劣微分作用素の理論を取り入れて平滑化作用および解の初期値に対する Lipschitz 連続依存性まで示した，こちらの証明法は，彼らのものより優れていると評価してもらえるものと思う．

その後 CGL 方程式の Cauchy 問題に対しても

[OY1] N. Okazawa and T. Yokota, Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p-Laplacian, Journal of Differential Equations **182** (2002), 541-576

で確立されたコンパクト性の方法が適用可能なことまで示せた．この問題の起源は2000年にPhilippe Clement教授(Delft工大)を訪ねたときまでさかのぼる． そこで議論された重み付の空間での(一般化)CGL 方程式の研究は，線形部分の$-\Delta$を Schrödinger 作用素$-\Delta + V_R$, $R>0$, で置換えるというアイデアにより論文[5]として実を結んだ．ここで V_R (x) は，$|x|<R$ のとき 0，$|x|>R$ のとき $(|x|-R)^2$なので，$R\to\infty$で 0 に収束するポテンシャルである．$R>0$ が固定されれば，$-\Delta + V_R$ はコンパクトなレゾルベントをもつので コンパクト性の方法が使えるのである．

CGL 方程式で$\lambda=\beta=\gamma=0$, $\alpha=\kappa=1$ とおいた方程式

$$\partial u/\partial t + i(-\Delta)u+|u|^{q-2}u = 0$$

のことをN. Ghoussoub は

[Gh] N. Ghoussoub, Antisymmetric Hamiltonians: variational resolutions for Navier-Stokes and other nonlinear evolutions, Communications on Pure Appl. Math. **60** (2007), 619--653

で非拡散型の CGL 方程式と呼んだ．非拡散型とは，この方程式には初期値に対する解の平滑化作用がないことを意味している．この方程式については

[OY2] N. Okazawa and T. Yokota, Monotonicity method applied to the complex Ginzburg-Landau and related equations, Journal of Math. Anal. Appl. 267(2002), 247-263

で単調性の方法（あるいは非線形縮小半群の方法）により最終的な結果が得られている．これは複素空間での問題故に，非線形の Hille-Yosida の定理の典型的な応用例だとの認識に手間どってしまったもののようである．Ghoussoub (2007)も自分の変分法的なアプローチでこの問題を捉えており，単調性の方法が適用可能なのは，べき乗型の非線形項までであろうとの予想を述べている．それが見込み違いであることを実例を挙げて明確化したのが論文[1]である．

課題(E)は，(A)の極限の場合とみなせるが，方法的には(A)とは独立に解の存在についてのひとつの抽象論が構成できた．この課題は院生のひとりの学位論文の一部となった．即ち，博士課程の院生(当時)のずば抜けた計算力のおかげで，論文[6]では(E)での標準的な方法の欠点を明確化し，[4]ではそれを乗り越える枠組みが構成できた．Thierry Cazenave 教授が自分の講義録（1989, 2003）の中で既に始めていたように解の存在を Strichartz 評価から切り離す議論をより精密に展開することができたわけである．

(B)については，成果の刊行について困難を感じる結果になった．博士課程の院生(当時)が自分の単著論文で低階項のうまい分解公式を導入したことにより，1 階微分の捉え方についての理解はかなり進んだように感じる(刊行までには多大の苦労があった)．その論文は

[So] M. Sobajima, L^p-theory for second order elliptic operators with unbounded coefficients, Journal of Evolution Equations **12** (2012), 957-971

である．それにも拘わらず故加藤敏夫教授が 1981 年に未解決問題として残された，一般化された Schrödinger 作用素の自己共役性の問題では劣臨界の場合しか解決できていない．成果というには無理があるが，この課題(B)については現在準備中の論文が複数あり，今後も気長に研究を続ける所存である．課題(H)は，(B)の一部とみなせる．(H)の条件

を満たす2階線形楕円型作用素が生成する解析的な縮小半群の非縮小的な拡張については，新しいものが得られているにもかかわらず，レフェリーからなかなかアクセプトの返事がもらえなかったので，まずは査読無しの報告集(〔雑誌論文〕の[3])に概要を載せてもらうことにした．証明つきの短縮版は別の所に投稿中である．課題(F)，(G)は，(B)に密接に関連したものであるが，その成果はそれぞれ〔雑誌論文〕の[9]，[7]として刊行できた．

(B)の研究は今後も続ける予定なので，刊行できた論文[3]，[7]，[9]についてもう少し詳しく述べておこう．課題(H)は Kato (1986)にある予想に始まった．L^p 空間での Schrödinger 作用素が生成する解析的半群は複素右半平面全体で解析的であるのかという予想である．この予想は，その解析的半群に対して Gauss 評価の存在を仮定することで Ouhabaz (1995)によって解決された．この事実が，元の作用素を課題(B)で述べたもので置換えても正しいのかを見極めようと考えたわけである．当初，Okazawa-Sobajima-Yokota の3人で結果をまとめ，2010年7月には Tubingen でも講演していた(〔学会発表〕の ④)が，同年9月の Bologna であった集会(〔学会発表〕の③)で Metafune 教授(Salento 大)に会ったとたんに結果の改良を示唆されてしまっていた．これも Sobajima (2012)と同様に諸般の事情により刊行に手間取ってしまった．そこで，まずは[3]の形で出版することにした．[9]，[7]は，Schrödinger 作用素についての新しい考察を含んでいるが，特に[7]は早期の出版を望んで[11]と同様に所属大学の学術誌に投稿したものである．

(C)そのものにまだ進展はないのであるが，そこへ向かう前にやるべき抽象論の構成とその応用例が課題(D)としてまとまった．抽象論は，故加藤敏夫教授が交換子型の条件の下で構成された発展作用素を，Hilbert 空間で内積型の条件の下で再構成する形をとっている．得られた成果が双曲型発展方程式の内容を豊かにするものであることを願っている．その一つは Dirac 方程式であり(〔雑誌論文〕の[8])，もう一つは，ひとつあるいは複数の Coulomb ポテンシャルの中心(の座標)が時間と共に動く場合の Schrödinger 発展方程式で(〔雑誌論文〕の[2]，[11])，いずれも Cauchy 問題を考えた．[11]は

[BKP] L. Baudouin, O. Kavian, J.-P. Puel, Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control, Journal of Differential Equations 216 (2005), 188-222

の形式計算を精密化しただけともいわれかねないが，[2]では完全に BKP を超えた結果を導いている．

従って，課題(C)の非正規形の双曲型発展方程式にはまだ届いていないのであるが，その外堀は埋めていよいよ本丸に近づきつつある．ひとつあるいは複数の Coulomb ポテンシャルの中心(の座標)が時間と共に動く場合の Schrödinger 発展方程式は，谷島(1997)による日本数学会の企画特別講演(の予稿集)以来やれる話のはずでありながら，いまひとつ詳細がよくわからない状態のままであった．

2008年9月に Cortona で Schrödinger 発展方程式について講演した(〔学会発表〕の⑥)際，参加者の中に J.-P. Puel 教授がいて，彼らの論文 BKP (2005)の存在を知った．これを精密に読んだ結果は論文[11]としてまとまった．[11]でも近似方程式の解法には

[Ok] N. Okazawa, Remarks on linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space, Advances in Math. Sci. Appl. 8 (1998), 399--423

の抽象論が使えることが分かり，先に進む上での指針は定まることになった．BKP を超えるための次の課題は Coulomb ポテンシャルの複数個化である．そんなとき連携研究者の吉井健太郎が Kato-Yajima(1999)の Dirac 方程式についての論文中に局所擬 Lorentz 変換を見つけたことで Schrödinger 発展方程式で使える局所擬 Galilei 変換のアイデアが固まった．この変換で Coulomb ポテンシャルの動きを封じてしまえば，元の方程式中のラプラス作用素は，係数が時間に依存する一般の2階楕円型作用素に変換されるが，それには適用可能な発展方程式の抽象論が構成可能であった．こうしてまとまったのが論文[2]であるが，そこへたどり着くには論文[8]，[11]での積み重ねが役立ったというわけである．[11]と[2]で BKP(2005)は完全に超えることができた．加藤理論(1975)以降明らかになっているように，係数作用素が時間に依存する線形発展方程式の抽象論ができると，準線形発展方程式の時間局所可解性の議論が可能になる．非線形 Schrödinger 方程式は，課題(E)として述べたように独自の発展を遂げてきたようにも見える．いくつかの保存則のおかげで大域的可解性も確立されている．これに対して[8]の条件は，遠方で増大するポテンシャルを容認するので準線形 Dirac 方程式を扱う際の基礎になるものと期待している．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 13 件）

[1] Yoshiki Maeda, Noboru Okazawa, Schrödinger type evolution equations with monotone nonlinearity of non-power-type, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S: Evolution Equations and Mathematical Models in Applied Sciences (Taranto, 2009), **6** (2013), 771－781 (査読有り).
DOI: 10.3934/dcdss.2013.6.771

[2] N. Okazawa, Kentarou Yoshii, Linear Schrödinger evolution equations with moving Coulomb singularities, Journal of Differential Equations **254** (2013), 2964－2999 (査読有り).
DOI: 10.1016/j.jde.2013.01.017

[3] Giorgio Metafune, N. Okazawa, Motohiro Sobajima, Tomomi Yokota, Analyticity for (C)_{0}-semigroups generated by elliptic operators in L^{p}, Proceedings of Seminar on Partial Differential Equations in Osaka 2012, **1** (2013), 163－172 (査読無し).
URL: http://hdl.handle.net/11094/24563

[4] N.Okazawa, Toshiyuki Suzuki, T.Yokota, Energy methods for abstract nonlinear Schrödinger equations, Evolution Equations and Control Theory **1** (2012), 337－354 (査読有り).
DOI: 10.3934/eect.2012.1.337

[5] Philippe Clement, N. Okazawa, M. Sobajima, T. Yokota, A simple approach to the Cauchy problem for complex Ginzburg-Landau equations by compactness methods, Journal of Differential Equations **253** (2012), 1250－1263 (査読有り).
DOI: 10.1016/j.jde.2012.05.002

[6] N. Okazawa, T. Suzuki, T. Yokota, Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potentials, Applicable Analysis, **91** (2012), 1605－1629 (査読有り).
DOI: 10.1080/00036811.2011.631914

[7] Y. Maeda, N. Okazawa, Holomorphic families of Schrödinger operators in L^{p}, SUT J. Math. **47** (2011), 185－216 (査読有り).
http://www3.ma.kagu.tus.ac.jp/sutjmath/

[8] N. Okazawa, K. Yoshii, Linear evolution equations with strongly measurable families and application to the Dirac equation, Discrete Continuous Dynamical Systems, Series S: Direct, Inverse and Control Problems for PDE's (Cortona, 2008), **4** (2011), 723－744 (査読有り).
DOI: 10.3934/dcdss.2011.4.723

[9] N. Okazawa, Hiroshi Tamura, T. Yokota, Square Laplacian perturbed by inverse fourth-power potential. I Self-adjointness (real case), Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **141 A**(2011), 409－416 (査読有り).
DOI: 10.1017/S0308210509001577

[10] N. Okazawa, T. Yokota, Subdifferential operator approach to strong wellposedness of the complex Ginzburg-Landau equation, Discrete Continuous Dynamical Systems, Series A **28** (2010), 311－341 (査読有り).
DOI: 10.3934/dcds.2010.28.311

[11] N. Okazawa, T. Yokota, K. Yoshii, Remarks on linear Schrödinger evolution equations with Coulomb potential with moving center, SUT J. Math. **46** (2010), 155－176 (査読有り).
http://www3.ma.kagu.tus.ac.jp/sutjmath/

[12] N. Okazawa, L^∞-estimates for Sobolev functions in terms of ∇ and Δ, Matematische Zeitschrift **262** (2009), 475－515 (査読有り).
DOI: 10.1007/s00209-008-0384-8

[13] N. Okazawa, T. Yokota, Quasi-m-accretivity of Schrödinger operators with singular first-order coefficients, Discrete Continuous Dynamical Systems, Series A **22** (2008), 1081－1090 (査読有り).
DOI: 10.3934/dcds.2008.22.1081

〔学会発表〕（計 6 件）

① Ph. Clement, N. Okazawa, M. Sobajima, T. Yokota, A simple approach to the Cauchy problem for complex Ginzburg-Landau equations by compactness methods, Partial Differential Equations, Inverse Problems and Control Theory, Bologna (Italy), 2012 年 7 月 16 日.

② Ph. Clement, N. Okazawa, H. Tamura, T. Yokota, Cauchy problem for the complex Ginzburg-Landau equation with harmonic oscillator, Nonlinear Evolution Equations and Related Topics to Mathematical Analysis of a phenomena, 京大数理解析研究所, 2010 年 10 月 14 日.

③ N. Okazawa, T. Yokota, K. Yoshii, Linear Schrödinger evolution equations with Coulomb potential with moving center, Partial Differential Equations, Semigroup Theory and Inverse Problems, Bologna (Italy), 2010 年 9 月 4 日.

④ N. Okazawa, M. Sobajima, T. Yokota, Analytic semigroups generated by 2^{nd} order elliptic operators with singular coefficients, Conference on Semigroups, Evolution Equations, Boundary Conditiond, Tübingen (Germany), 2010 年 7 月 1 日.

⑤ N. Okazawa, Linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space with applications to symmetric hyperbolic systems, International Workshop on Differential and Difference Equations, Nanoi and Holong (Vietnam), 2009 年 10 月 30 日.

⑥ N. Okazawa, K. Yoshii, Linear evolution equations of hyperbolic type with application to Schrödinger equations, Direct, Inverse and Control Problems for Partial Differential Equations, Cortona (Italy), 2008 年 9 月 24 日

６．研究組織

(1) 研究代表者
岡沢　登（Okazawa Noboru）
東京理科大学・理学部第一部・教授
研究者番号：80120179

(2) 研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3) 連携研究者
横田 智巳（Yokota Tomomi）
東京理科大学・理学部第一部・准教授
研究者番号：60349826

吉井 健太郎（Yoshii Kentarou）
東京理科大学・理学部第一部・助教
研究者番号：00632449