

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月15日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540191

研究課題名（和文） フックス型偏微分方程式系の代数解析的・超局所的視点からの研究

研究課題名（英文） Study of Fuchsian system of differential equations from the view point of algebraic analysis and microlocal analysis

研究代表者

山崎 晋（YAMAZAKI SUSUMU）

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：00349953

研究成果の概要（和文）：

- (1) 実解析的線型偏微分方程式系（D加群）に対し，本多尚文氏（北海道大学）による非正則度の条件を課せば，対応するジュヴレイ函数及び超分布解に対して非特性初期値，境界値が定義出来た．更に（弱）双曲型という条件下で，コーシー問題及び境界値問題の一意可解性が証明出来た．
- (2) 正則特殊化可能系に対し，田原秀敏氏（上智大学）による非正則度の仮定の下で，境界に於いて延長可能なシュヴァルツ超函数及び超分布解に対する境界値写像を定義する事が出来た．
- (3) 青木貴史氏（近畿大学），本多尚文氏（北海道大学）との共同研究で，解析的範疇の無限階擬微分作用素の新たなコホモロジー表現及び表象理論が確立出来た．

研究成果の概要（英文）：

- (1) If we impose an irregularity condition due to N. Honda for a system of analytic linear differential equations (D-Module), we can define non-characteristic initial and boundary values for the corresponding Gevrey function or ultradistribution solutions. Moreover, under a (weak) hyperbolicity condition, we can prove unique solvability theorems for Cauchy and boundary value problems.
- (2) For any regular-specializable system, we can define general boundary values for extensible distribution or ultradistribution solutions under an irregularity condition due to H. Tahara.
- (3) By a joint work with T. Aoki and N. Honda, we can establish new cohomological representation and symbol theory for pseudodifferential operators of infinite order in analytic category.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：代数解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：代数解析学，超局所解析学，佐藤超函数，D加群

1. 研究開始当初の背景

フックス型方程式系に対するコーシー問題、即ち初期値問題は、佐藤超函数の範疇で考える限り、田原秀敏の先駆的研究の後、報告者が証明した通り、双曲型の条件の下で、一意可解性定理が得られている。又、特別なフックス型方程式系である正則特殊化可能系の場合、ローラン及びモンテロフェルナンデスは、一般的な境界値問題を定式化し、双曲型の条件の下で一意可解性定理を証明した。又、この結果は報告者によって超局所化されている。一方、シュヴァルツ超函数及びジュヴレイ超分布で、同様の問題を考察する場合、佐藤超函数の時とは異なった現象が現れる。先ず、シュヴァルツ超函数及びジュヴレイ超分布の層は脆弱ではないので、境界値問題の定式化、特に境界値を取る操作に関して一般に条件がある。更にフックス型の場合、ジュヴレイ超分布解については、作用素による割算定理は一般には不成立で、割算定理の成立には正則特殊化可能系の場合を含めて、田原が導入した非正則度の条件を課さねばならない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、実解析的線型偏微分方程式系に対し、代数解析学及び超局所解析学、特に D 加群の枠組みでコーシー問題及び境界値問題を考察する事である。対象とするのは、主に初期面で退化する微分方程式系として正則特殊化可能系、更に一般的なフックス型方程式系と呼ばれる線型偏微分方程式系である。フックス型方程式系は、単独のフックス型作用素の方程式系への一般化で、非特性、特性型を含む、重要な D 加群のクラスの一つである。正則特殊化可能系は、フックス型方程式系の特別なクラスで、代数解析的な手法で扱う事が比較的容易であり、正則ホロノミー系は正則特殊化可能系となる事が知られている。これらの方程式系について、代数解析の中心課題である佐藤超函数、及びその実解析的特異性を分解した超局所函数に関して、コーシー問題及び境界値問題を考察するのみならず、シュヴァルツ超函数解、更にはジュヴレイ族の超分布及びその超局所化の範疇でも同種の問題を考える。

3. 研究の方法

代数解析学、及び実解析的な超局所解析学の常套手段である、ホモロジー代数、層の導来圏、層の超局所解析といった抽象的な手段を用いる他、具体的計算に有用な表象理論を適用して研究を進める。更に、既存の代数解析の手法では、シュヴァルツ超函数を扱う事が

困難であったが、アンドロニコフに依る緩増大超局所化、更には柏原・シャピラの Ind-sheaf 及び劣解析層の理論に依って、この困難の多くが克服されつつある。これによって、シュヴァルツ超函数及びその超局所化を代数的手法を用いて扱う。

4. 研究成果

(1) (実解析的) 線型偏微分方程式系の初期値・境界値問題を扱う際、ジュヴレイ函数及び超分布の範疇で可解性及び解の一意性を考えると、佐藤超函数の場合と異なり、単に(弱)双曲型というだけでは条件が足りない事が以前から知られていた。それに関連して、低階項に非正則度と呼ばれる量が定義されており、単独方程式や、特別な形の方程式系については、ジュヴレイ増大度に応じた非正則度の条件を与えれば初期値・境界値問題がうまく定義出来る事が知られている。私は、その一般化として、一般的な線型偏微分方程式系 (D 加群) に対する非正則度として、本多尚文氏 (北海道大学) による定義を採用し、以下の結果を得る事が出来た。ジュヴレイ増大度に応じた非正則度の条件を方程式系に課せば、対応するジュヴレイ函数及び超分布解に対して初期値、境界値を取る事が可能となる。更に(弱)双曲型という条件下で、コーシー問題及び境界値問題の一意可解性が証明出来る。

以上の結果は、初期面の余次元が一般の場合 (高余次元) でも成り立つ事が証明出来た。

従って従来知られていた、余次元 1、且つ単独方程式、又は特別な形の方程式系の場合の大幅な一般化となっている。

(2) 正則特殊化可能系に対して、田原秀敏氏 (上智大学) による非正則度の仮定の下で、導来圏の中で、境界に於いて延長可能なシュヴァルツ超函数及び超分布解に対する境界値写像を定義する事が出来た。この境界値は、佐藤超函数のものと両立し、特性指数の条件もつかない極めて一般的なものであり、既知の境界値の一般化となっている事が判る。今後は、更に、双曲性の仮定等の下での、可解性定理の確立等の考察が目標となる。

(3) 解析的範疇の無限階擬微分作用素の表象解析に関して、その基礎的部分 (特に作用素の積の具体的表示) について未整理、不完全な点がある事が最近発見された。これに関して、青木貴史氏 (近畿大学)、本多尚文氏 (北海道大学) と共同研究を進め、

新たなコホモロジー表現及び表象理論が確立出来た。これらは、今後、増大度付きコホモロジー等にも応用が期待出来る。

- (4) 劣解析層の理論は、従来抽象的であった柏原、シャピラの Ind-sheaf の理論を、構成可能層の場合には通常の層の理論の如く扱えるという長所がある。近年の、ルカによる劣解析層の超局所化の理論は、その意味で興味深く、今後この方面の研究を進めたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① Susumu Yamazaki, Boundary values of ultradistribution solutions to regular-specializable systems, Recent Development of Micro-Local Analysis for the Theory of Asymptotic Analysis, RIMS Kokyuroku Bessatsu B40 (2013), 53-67, 査読有。

② Susumu Yamazaki, Gevrey class or ultradistribution solutions to Cauchy and boundary value problems for systems with irregularities, Exact WKB Analysis and Microlocal Analysis, RIMS Kokyuroku Bessatsu B37 (2013), 231-245, 査読有

③ Susumu Yamazaki, Remarks on boundary values for temperate distribution solutions to regular-specializable systems, Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo 17 (2011), 267-301, 査読有

④ 山崎 晋, 無限階擬微分作用素の表象理論, 数理解析研究所講究録 1723 (2011), 150-178, 査読無

[学会発表] (計7件)

① Takashi Aoki, Naofumi Honda, Susumu Yamazaki, Kernel functions and symbols of pseudodifferential operators of infinite order with an apparent parameter, Recent Development of Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis, 2012年10月26日, 京都大学数理解析研究所

② Susumu Yamazaki, Remarks on Cauchy and boundary value problems for distribution solutions to systems with regular singularities, Microlocal Analysis, Differential Equations and Related Topics, 2012年8月3日, 東京大学

③ Susumu Yamazaki, Microsupport of Whitney function solutions to systems with regular singularities and its applications, Microlocal Analysis and Its Development, 2012年3月10日, 日本大学

④ Susumu Yamazaki, Boundary values of ultradistribution solutions to regular specializable systems, Recent Development of Micro-Local Analysis for the Theory of Asymptotic Analysis, 2011年11月16日, 京都大学数理解析研究所。

⑤ Susumu Yamazaki, Cauchy and boundary value problems for Gevrey function or ultradistribution solutions to irregular systems, Microlocal Analysis and Related Topics, 2010年3月2日, 日本大学。

⑥ Susumu Yamazaki, Remark on boundary values for distribution Solutions to regular-specializable systems, Microlocal Analysis and Related Topics, 2009年10月21日, 関西学院大学

⑦ Susumu Yamazaki, Cauchy problem for ultradifferentiable or ultradistribution solutions to systems with irregularities, 完全 WKB 解析と超局所解析, 2008年5月29日, 京都大学数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 晋 (YAMAZAKI SUSUMU)
日本大学・理工学部・准教授
研究者番号: 00349953

(2) 研究分担者

該当者なし

(3)連携研究者

青木 貴史 (AOKI TAKASHI)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：80159285

本多 尚文 (HONDA NAOFUMI)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：00238817